Zur Projektivität der δs-Funktionen [1]).

Von

Felix Hausdorff (Bonn).

Es sei

$$A = \Phi(A_1, A_2, \ldots) = \mathop{S}_{p}^{P} \mathop{D}_{n}^{p} A_n$$

eine δs-Funktion der Mengenfolge A_n, wobei P ein nicht leeres System von nicht leeren (abzählbaren oder endlichen) Mengen $p = \{n_1, n_2, \ldots\}$ natürlicher Zahlen ist. Wird die Funktion Φ (d. h. das System P) festgehalten, während die A_n unabhängig von einander alle Mengen eines Systems $\mathfrak{A}$ durchlaufen, so durchläuft A ein Mengensystem, das mit $\Phi\mathfrak{A}$ bezeichnet werde.

Es sei $Z = (X, Y)$ das Produkt (Verbindungsmenge) der Mengen X, Y. Für eine Menge C in Z sei πC ihre Projektion auf X; durchläuft C ein Mengensystem $\mathfrak{C}$, so heisse $\pi\mathfrak{C}$ das von πC durchlaufene System.

Ist $\mathfrak{C}$ ein System von Mengen in Z, $\mathfrak{A}$ ein System von Mengen in X, so heisse $\mathfrak{C}$ *δs-projektiv zu* $\mathfrak{A}$, wenn zu jeder δs-Funktion Ψ eine δs-Funktion Φ so bestimmt werden kann, dass

$$\pi\Psi\mathfrak{C} = \Phi\mathfrak{A}.$$

Die Herren Kantorovitch und Livenson haben in ihrem sehr interessanten Memoir on the analytical operations and projective sets I, Fund. Math. 18 (1932), p. 214—279 die δs-Projektivität als

[1]) Herr Sierpiński war so freundlich, diese Funktionen nach mir zu benennen; ich selbst hatte, bevor ich die sachliche Bezeichnung wählte, die Absicht, sie nach Herrn Sierpiński zu benennen, der sie viel früher angewendet hat (Sur les ensembles mesurables B, C. R. 171 (1920), p. 24—26).

Konsequenz einer spezielleren Eigenschaft, der Projektivität von $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$, nachgewiesen, die ich in etwas einfacherer Form folgendermassen erklären möchte. Eine Menge $C \leqq Z$ lässt sich so schreiben:

$$C = \mathop{S}_{y}^{Y} (A_y, y),$$

wo (A_y, y) der Durchschnitt von C mit (X, y) und A_y die (schlichte) Projektion dieses Durchschnitts auf X, d. h. die Menge der x mit $(x, y) \epsilon C$ ist. Die Mengen A_y mögen die *y-Schichten* von C heissen. Nun sei jedem $y \epsilon Y$ eine δs-Funktion Φ_y zugeordnet; bildet man dann mit den y-Schichten

$$A_y = \Phi_y(A_1, A_2, \ldots)$$

aus einer Mengenfolge $A_n \leqq X$ die Menge C, so wird

$$C = \Omega(A_1, A_2, \ldots)$$

eine Funktion (keine δs-Funktion) der Mengen A_n, und werden die A_n wieder auf alle möglichen Weisen einem Mengensystem $\mathfrak{A}$ entnommen, während das System der Φ_y fest bleibt, so durchläuft C ein Mengensystem $\mathfrak{C} = \Omega\mathfrak{A}$. Ein solches Mengensystem $\mathfrak{C}$ heisst *zu* $\mathfrak{A}$ *projektiv.*

Die Projektion von C auf X ist

$$A = \pi C = \mathop{S}_{y}^{Y} A_y = \Phi(A_1, A_2, \ldots),$$

wobei $\Phi = \mathop{S}_{y}^{Y} \Phi_y$ eine δs-Funktion ist; denn wird kurz

$$A_p = \mathop{D}_{n}^{p} A_n$$

geschrieben und ist

$$\Phi_y = \mathop{S}_{p}^{P_y} A_p,$$

so ist

$$\Phi = \mathop{S}_{p}^{P} A_p \quad \text{mit} \quad P = \mathop{S}_{y}^{Y} P_y.$$

Demnach ist $\pi\mathfrak{C} = \Phi\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ projektiv ist; übrigens kann man bei gegebenem $\mathfrak{A}$ und Φ noch unendlich viele zu $\mathfrak{A}$ projektive Mengensysteme $\mathfrak{C}$ mit $\pi\mathfrak{C} = \Phi\mathfrak{A}$ aufstellen, indem man P willkürlich als $\mathop{S}_{y}^{Y} P_y$ $(P_y > 0)$ darstellt.

Diese Projektivität hat folgende Eigenschaften (l. c. theorems X, XI, VI):

I. *Ist $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ projektiv, so ist für eine beliebige δs-Funktion Ψ auch $\Psi\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ projektiv.*

Denn da die Bildung der y-Schicht distributiv zu Summen- und Durchschnittsbildung ist, so gilt für die y-Schichten A_y, A_{my} von C und C_m mit $C = \Psi(C_1, C_2, \ldots)$ zugleich

$$A_y = \Psi(A_{1y}, A_{2y}, \ldots);$$

ist also

$$A_{my} = \Phi_y(A_{m1}, A_{m2}, \ldots) \qquad (A_{mn} \in \mathfrak{A}),$$

so kann man

$$A_{my} = \Theta_{my}(A_{11}, A_{12}, A_{21}, \ldots)$$

als δs-Funktion der Doppelfolge A_{mn} ansehen und A_y ist als δs-Funktion von δs-Funktionen wieder eine δs-Funktion

$$A_y = \Theta_y(A_{11}, A_{12}, A_{21}, \ldots)$$

der A_{mn}. Bei Betrachtungen dieser Art ist übrigens der Begriff der positiv analytischen Funktion (l. c. p. 225) sehr zweckmässig, der die Funktionen Φ von ihrer Darstellung als δs-Funktionen unabhängig durch eine innere, „deskriptive" Eigenschaft erklärt.

II. *Ist $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ projektiv, so ist $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ δs-projektiv.*

Denn analog zu $\pi\mathfrak{C} = \Phi\mathfrak{A}$ ist nach I auch $\pi\Psi\mathfrak{C} = \Theta\mathfrak{A}$, wo $\Theta = \mathop{S}\limits_y^Y \Theta_y$ eine von Ψ abhängige δs-Funktion ist.

III. *Ist $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ projektiv, so ist das System $\mathfrak{C}^*$ der Komplemente (in Z) der Mengen von $\mathfrak{C}$ zum System $\mathfrak{A}^*$ der Komplemente (in X) der Mengen von $\mathfrak{A}$ projektiv.*

Denn zu jeder δs-Funktion $\Phi = \mathop{S}\limits_p^P \mathop{D}\limits_n^p$ gibt es eine komplementäre $\Phi^* = \mathop{D}\limits_p^P \mathop{S}\limits_n^p$, die zunächst als σd-Funktion erscheint, aber (als positiv analytisch) auch als δs-Funktion dargestellt werden kann; die Behauptung folgt dann aus

$$C^* = \mathop{S}\limits_y^Y (A_y^*, y), \quad A_y^* = \Phi_y^*(A_1^*, A_2^*, \ldots),$$

wo $C^* = Z - C$, $A_y^* = X - A_y$, $A_n^* = X - A_n$ und Φ_y^* komplementär zu Φ_y ist.

Die Herren Kantorovitch und Livenson haben nun (fundamental theorem, p. 264) auf Grund ihres Projektivitätsbegriffs bewiesen, dass unter gewissen Annahmen über den Raum Y (Y metrisch, kompakt, unabzählbar) das System der in Z abgeschlossenen Mengen δs-projektiv zum System der in X abgeschlossenen Mengen ist, und damit frühere Ergebnisse von ihnen selbst, Herrn Sierpiński und Frl. Braun (vgl. die Litteraturangaben p. 218) verallgemeinert. Der Zweck dieser kleinen Mitteilung ist, auf ganz einfachem Wege den allgemeinsten hier gültigen Satz zu beweisen:

IV. *Ist X ein beliebiger, Y ein separabler topologischer Raum, so ist das System $\mathfrak{C}$ der in $Z = (X, Y)$ offenen Mengen projektiv zum System $\mathfrak{A}$ der in X offenen Mengen.*

Nach III ist dann auch das System $\mathfrak{C}^*$ der in Z abgeschlossenen Mengen zum System $\mathfrak{A}^*$ der in X abgeschlossenen Mengen projektiv.

Der Begriff des topologischen Raumes X ist hier im weitesten Sinn verstanden: es sind die in X offenen Mengen (und ihre Komplemente, die abgeschlossenen) gegeben, die Summe beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen, X selbst und die leere Menge ist offen. Irgend welche Trennungsaxiome sind unnötig, es brauchen nicht einmal die einpunktigen Mengen abgeschlossen zu sein. Sind U, V die in X, Y offenen Mengen, so sind die Produkte (U, V) und ihre Summen die in (X, Y) offenen Mengen.

Nun sei Y separabel, d. h. es gibt endlich oder abzählbar viele in Y offene Mengen $V_1, V_2, \ldots$, die mit ihren Summen alle in Y offenen Mengen V liefern. Jeder Punkt $y \in Y$ bestimmt die Menge $\{n_1, n_2, \ldots\}$ derjenigen n, für die $y \in V_n$; wir ordnen ihm die σd- oder δs-Funktion

$$A_y = A_{n_1} + A_{n_2} + \ldots = \Phi_y(A_1, A_2, \ldots)$$

der Mengenfolge $A_1, A_2, \ldots$ zu und bilden für $A_n \leqq X$ mit den Mengen A_y als y-Schichten die Menge

$$C = \mathop{S}\limits_y^Y (A_y, y) = \Omega(A_1, A_2, \ldots).$$

Zu zeigen ist, dass C die in Z offenen Mengen durchläuft, wenn die A_n die in X offenen Mengen durchlaufen.

Offenbar ist $(x, y) \in C$ gleichbedeutend mit $x \in A_y$ und dies damit, dass es ein n mit $x \in A_n$, $y \in V_n$ gibt, d. h. es ist einfach

$$C = \underset{n}{S}(A_n, V_n),$$

woraus unmittelbar folgt, dass bei offenen A_n auch C offen ist.

Um zu zeigen, dass jedes in Z offene G ein C ist, verstehen wir unter A_n die grösste in X offene Menge mit $(A_n, V_n) \leqq G$ (die Summe aller in X offenen Mengen U mit $(U, V_n) \leqq G$). Die hiermit gebildete Menge C ist also $\leqq G$; andererseits hat aber jeder Punkt $(x, y) \in G$ eine Umgebung $(U, V_n) \leqq G$ und dann ist $U \leqq A_n$, also

$$(x, y) \in (A_n, V_n) \leqq C \quad \text{und} \quad G \leqq C.$$

Der hiermit beendete Beweis von IV ist eine vereinfachte und von allen überflüssigen Einschränkungen befreite Form des Beweises, den die Herren Kantorovitch und Livenson für ihr Theorem XII B (p. 255) gegeben haben.

Sur une condition de quasi-rectificabilité.

Par

A. Marchaud (Marseille).

1. Considérons, dans l'espace euclidien à n dimensions, un arc simple $\widehat{AB}$, image biunivoque et bicontinue d'un segment $\overline{\alpha\beta}$. On dira que l'arc est *quasi rectifiable*, s'il est possible de le modifier sur un ensemble, dont l'image sur $\overline{\alpha\beta}$ a une mesure aussi petite qu'on veut, de manière à obtenir un arc simple rectifiable, et ceci *quelle que soit la correspondance entre les points de l'arc et ceux du segment.*

Ceci posé, on trouvera, dans le présent travail, la démonstration d'un théorème général dont voici l'énoncé pour $n = 3$.

Soient ω_1, ω_2, ω_3, trois droites à distance finie ou non ne passant pas par un même point, Ω la quadrique dont les génératrices s'appuient sur ces droites, et $\widehat{AB}$ un arc simple sans point sur Ω,

1° Si le nombre des points de $\widehat{AB}$ dans tout plan contenant l'une des ω_i est borné, l'arc est rectifiable.

2° Si ce nombre est seulement fini, l'arc est quasi-rectifiable, de plus, entre deux points quelconques de $\widehat{AB}$, il y a un arc partiel rectifiable.

Dans le cas où les ω_i sont à l'infini, la première conclusion résulte d'une proposition de M. S. Banach [1]. Je l'ai démontrée dans un autre travail [2].

Un cas particulier du théorème général s'énonce ainsi: une fonc-

[1] S. Banach, *„Sur les lignes rectifiables et sur les surfaces dont l'aire est finie"*. Fund. Math. 1925, t. VII, p. 224.

[2] A. Marchaud, *„Sur les Continus d'ordre borné"*. Acta Math. t. 55, p. 76.