Ein Satz über dimensionelle Komponenten.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Satz. *Unter Zugrundelegung des mengentheoretischen Dimensionsbegriffes hat jede dimensionnelle Komponente*[1] *A einer kompakten abgeschlossenen r-dimensionalen Menge F mit der Vereinigungsmenge B der übrigen dimensionellen Komponenten von F einen höchstens r-2-dimensionalen Durchschnitt.*

Wir bestimmen für $\alpha < \Omega$ eine absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen $F_\alpha \supset A$ in nachstehender Weise.

(I) $F_1 = F$;

(II) Wenn $F_\alpha = A$ so $F_{\alpha+1} = A$;

(III) Wenn $F_\alpha - A \neq 0$, so ist F_α keine Cantorsche Mannigfaltigkeit, es existiert also eine Zerlegung von F_α in zwei abgeschlossene echte Teilmengen mit höchstens r-2-dimensionalen Durchschnitt; $F_{\alpha+1}$ ist diejenige dieser Teilmengen welche A enthält;

(IV) Ist $\beta < \Omega$ eine Limeszahl, so ist $F_\beta = \prod\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha$.

Es existiert ein erstes λ, für welches $F_\lambda = F_{\lambda+1} = A$. Daher:

$$F = A + \sum_{\alpha<\lambda} (F_\alpha - F_{\alpha+1}). \tag{1}$$

Ist $x \in B$, so existiert eine von A verschiedene dimensionelle Komponente A_1 von F, derart dass $x \in A_1$. A_1 ist in F_λ nicht enthalten, es existiert also ein erstes μ, derart dass A_1 in F_μ nicht

[1]) Alexandroff, Math. Ann. 106. S. 215—216.

enthalten ist. ($\mu \leqq \lambda$). Nach (IV) ist μ offenbar keine Limeszahl, also $\mu = \xi + 1$. Es ist: $A_1 \subset F_\xi = F_{\xi+1} + \overline{(F_\xi - F_{\xi+1})}$; $\xi < \lambda$; $\dim[F_{\xi+1} \times \overline{(F_\xi - F_{\xi+1})}] \leqq r-2$, also: $A_1 \subset \overline{F_\xi - F_{\xi+1}}$, $x \in \overline{F_\xi - F_{\xi+1}}$. Demnach:

$$B \subset \sum_{\alpha<\lambda} \overline{F_\alpha - F_{\alpha+1}}, \tag{2}$$

$$A \times B \subset \sum_{\alpha<\lambda} A \times \overline{(F_\alpha - F_{\alpha+1})} \subset \sum_{\alpha<\lambda} F_\alpha \times \overline{(F_\alpha - F_{\alpha+1})}, \tag{3}$$

also wegen $\dim F_\alpha \times \overline{(F_\alpha - F_{\alpha+1})} \leqq r-2$ und nach dem Summensatz:

$$\dim A \times B \leqq r-2, \tag{4}$$ w. z. b. w.

Im Falle der Dimension mod m kann man einstweilen nur behaupten (da B nicht notwendig abgeschlossen), dass $A \times B$ in bezug auf A von der ersten Kategorie sein muss[1]). Jedenfalls kann sowohl im Falle der mengentheoretischen Dimension, wie auch im Falle der Dimension mod m, eine dimensionelle Komponente von F in der Vereinigungsmenge der übrigen nicht enthalten sein[2]).

[1]) vrgl. Alexandroff, l. c. S. 216, Summensatz.

[2]) Diese Behauptung wird also durch das von Alexandroff (l. c. S. 216) angegebene Kolmogoroff'sche Gegenbeispiel nicht widerlegt; i. d. T. ist das Kolmogoroff'sche Kontinuum eine 2-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit, hat also nur eine dimensionelle Komponente — nämlich sich selbst.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich darauf hinweisen, dass das von Herrn Alexandroff (l. c. S. 227) gestellte Problem III schon im Falle $r = 1$ durch ein von Herrn Knaster (Fund. Math. VII (1925) S. 265—273) konstruiertes Kontinuum, sowie durch ein früheres dortselbst S. 264 erwähntes Beispiel von Herrn Nikodym, negativ gelöst ist.