Sur le type c de l'hyperespace d'un continu.

Par

Stefan Mazurkiewicz. (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant

(I) *Le type c de l'hyperespace 2^E d'un continu non péanien E est égal au type c d'une étoile de Cantor G* [1]).

J'ai démontré antérieurement [1]) que $c\,2^E \leqq c\,G$, il suffit donc de démontrer que $c\,2^E \geqq c\,G$, ce qui revient [2]) à la démonstration de:

(II) *Si E est un continu non péanien, alors $(2^E)^*$ n'est pas séparable.*

Désignons par ϱ, δ, ϱ^* la distance, le diamètre et la distance relative [3]) dans E, par ϱ_1, δ_1, ϱ_1^* la distance, le diamètre et la distance relative dans 2^E.

Lemme. Soit $\mathfrak{H} \subset 2^E$ un continu, $X_1 \epsilon \mathfrak{H}$, $X_2 \epsilon \mathfrak{H}$, $p \epsilon X_1$, P le composant de l'ensemble $H = \sum\limits_{X \epsilon \mathfrak{H}} X$, contenant p; alors $P \times X_2 \neq 0$.

Supposons le contraire; il existe alors une décomposition:

$$(1) \quad H = H_1 + H_2;\; H_1 = \overline{H}_1;\; H_2 = \overline{H}_2;\; H_1 \times H_2 = 0;\; P \subset H_1;\; X_2 \subset H_2.$$

Désignons par $\mathfrak{H}_1$ l'ensemble des $X \epsilon \mathfrak{H}$ tels que $X \times H_1 \neq 0$ et posons $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_1$.

[1]) Comp. pour la terminologie et les notations: S. Mazurkiewicz. Fund. Math. XVIII, p. 171—178.

[2]) Mazurkiewicz. C. R. du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves p. 68—69.

[3]) distance relative dans E = distance dans E^*.

D'après (1) la relation: $X \epsilon \mathfrak{H}_2$ entraîne $X \subset H_2$ et vice versa. Donc:

$$(2) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2;\; \mathfrak{H}_1 = \overline{\mathfrak{H}}_1;\; \mathfrak{H}_2 = \overline{\mathfrak{H}}_2;\; \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 = 0,\; X_1 \epsilon \mathfrak{H}_1;\; X_2 \epsilon \mathfrak{H}_2$$

c. à d. $\mathfrak{H}$ n'est pas un continu, contrairement à la supposition.

Démonstration de (II). Soit x_0 un point de second genre de E. Il existe un $\lambda > 0$ et une suite $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ telle que:

$$(3) \quad \lim x_j = x_0;\; \varrho(x_j, x_0) < \frac{\lambda}{8};\; \varrho^*(x_i, x_j) \geqq \lambda,\; i, j = 0, 1, \ldots,\; i \neq j.$$

Soit A l'ensemble des points x_j, $j = 0, 1, \ldots$ On a $A = \overline{A}$, $2^A \subset 2^E$ et 2^A a la puissance du continu. Soit $Y_1 \epsilon 2^A$; $Y_2 \epsilon 2^A$; $Y_1 \neq Y_2$. On a l'une au moins des relations: $Y_1 - Y_2 \neq 0$, $Y_2 - Y_1 \neq 0$, on peut supposer que $Y_1 - Y_2 \neq 0$. Il existe un x_m tel que $m > 0$, $x_m \epsilon Y_1 - Y_2$. Soit $\mathfrak{H}$ un continu dans 2^E tel que $Y_1 \epsilon \mathfrak{H}$, $Y_2 \epsilon \mathfrak{H}$. Soit Q la composante de $H = \sum\limits_{Y \epsilon \mathfrak{H}} Y$ qui contient x_m. D'après notre lemme $Q \times Y_2 \neq 0$, soit $x_n \epsilon Q \times Y_2$; on aura $\varrho^*(x_m, x_n) \geqq \lambda$, donc $\delta(Q) \geqq \lambda$. Il existe par suite un $z \epsilon Q$ tel que $\varrho(z, x_m) \geqq \frac{\lambda}{2}$, donc d'après (3): $\varrho(z, x_j) \geqq \frac{\lambda}{4}$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots$ c. à d. $\varrho(z, A) \geqq \frac{\lambda}{4}$. Comme $z \epsilon Q \subset H$ il existe un $Y_3 \epsilon \mathfrak{H}$ tel que $z \epsilon Y_3$. On aura:

$$(4) \qquad \varrho_1(Y_1, Y_3) \geqq \varrho(Y_1, z) \geqq \varrho(A, z) \geqq \frac{\lambda}{4}$$

donc $\delta_1(\mathfrak{H}) \geqq \frac{\lambda}{4}$. Il en résulte: $\varrho_1^*(Y_1, Y_2) \geqq \frac{\lambda}{4}$. Deux éléments quelconques de 2^A ayant dans $(2^E)^*$ une distance $\geqq \frac{\lambda}{4}$, on voit que $(2^E)^*$ n'est pas séparable c. q. f. d

Warszawa 20/IX 1932.