soeben Bewiesenen für jeden Punkt von endlicher Ordnung die Beziehung $m_\alpha(p) \leqq o(p)$. Also brauchen wir nur noch zu zeigen, dass für einen Punkt p von wachsender Ordnung die Beziehung $m_\alpha(p) = o(p)$ gilt, d. h. dass für jeden solchen Punkt p die α-Urbildmenge höchstens abzählbar ist. Zunächst enthält die Menge Q_1 aller derjenigen α-Urbildpunkte von p, die in höchstens endlich vielen Kreisbogen K_j liegen, $n(p)$, also höchstens abzählbar viele Punkte. Wenn wir nun zeigen, dass schon sämtliche Urbildpunkte von p in Q_1 enthalten sind, so sind wir offenbar am Ziel. Nehmen wir an, es gäbe auf K einen Punkt q, welcher in unendlich vielen Kreisbogen K_j enthalten ist und den Punkt p zum α-Bild hat. Es seien K_{j_i} $(j_1 < j_2 < \ldots)$ die sämtlichen den Punkt q enthaltenden Kreisbogen K_j. Da p als Punkt von wachsender Ordnung kein Endpunkt ist, muss er auf einem Baum C_k und daher auf einem Bogen B_j liegen. Wir wählen ein h so gross, dass $j_h > j$ ist. Nun enthält nach unserer Zwischenbehauptung die Summe $\sum_{i=h}^{\infty} B_{j_i}$ einen in p endenden Bogen B^1, dessen zweiter Endpunkt p' in $B_{j_{h-1}}$ liegt. Anderseits enthält der Baum C_{j_h} einen die Punkte p und p' verbinden, abgeschlossenen Bogen B^2. Da der Baum $C_{j_{h-1}}$ wegen (5) zu allen Bogen B_{j_i} $(i \geqq h)$ fremd ist, sind auch die beiden Bogen B^1 und B^2 zueinander fremd; die Summe $B^1 + B^2$ ist also ein topologischer Kreis, was der Voraussetzung, dass R ein Baum ist, widerspricht. Hiermit ist die Annahme, dass es α-Urbilder des Punktes p gibt, die nicht in der abzählbaren Menge Q_1 liegen, widerlegt, und unser Satz 2 vollständig bewiesen.

Über die dimensionellen Komponenten.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich ein von Herrn Alexandroff gestelltes Problem [2]) im Fall der mengentheoretischen Dimension gelöst. Die vorliegende Note enthält die Lösung des genannten Problems im Fall der Dimension mod m. Zu diesem Zweck werden gewisse Mengenfunktionen $a_m^r(F)$ eingeführt, welche die Urysohnsche Mengenfunktion $d_r(F)$ [3]) (den r-ten *Dimensionsgrad*) ersetzen sollen.

1. F sei eine geschränkte, abgeschlossene Teilmenge des R^n. Ist z ein algebraischer Zyklus in F, so werden wir mit $e(z, F)$, bzw. $e'(z, F)$ die Berandungs- bzw. Homologieschranke [4]) von z in F bezeichnen. Ist $Z = (z_1, z_2, \ldots)$ ein wahrer Zyklus [5]) (im allgemeinen nach variablem Modul) in F so setzen wir:

$$e(Z, F) = \underline{\lim}\, e(z_i, F) \tag{1}$$

$$e'(Z, F) = \underline{\lim}\, e'(z_i, F). \tag{2}$$

2. Sind $Z = (z_1, z_2, \ldots)$ und $Z' = (z_1, z_2', \ldots)$ wahre Zyklen in F, $Z \simeq Z'$, so ist

$$e(Z, F) = e(Z', F); \quad e'(Z, F) = e'(Z', F). \tag{3}$$

[1]) Fund. Math. XIX, p. 243—247.

[2]) Alexandroff: *Dimensionstheorie* (im folgenden mit *Dim* zitiert) Math. Ann. 106 (1932), 69, S. 215—216, Problem II. Ich folge dieser Arbeit in Terminologie und Bezeichnungsweise.

[3]) Urysohn. Fund. Math. VIII, p. 353.

[4]) *Dim* 23, S. 179.

[5]) *Dim* 21, S. 178.

Es genügt die zweite Gleichung zu beweisen. Nach Voraussetzung existiert eine Folge positiver Zahlen $\{\eta_i\}$ und eine Folge von η_i-Komplexen C_i in F derart dass:

$$\lim \eta_i = 0 \tag{4}$$

$$C_i \to z_i - z_i'. \tag{5}$$

Wenn z_i (also auch z_i') ein Zyklus mod m_i ist und D_i ein τ-Komplex in F, derart dass: $D_i \to t_i z_i$ ($t_i = 1$ wenn $m_i > 0$, $t_i \neq 0$ wenn $m_i = 0$), dann ist $D_i' = D_i - t_i C_i$ ein $\tau + \eta_i$-Komplex in F und $D_i' \to t_i z_i'$. Also ist:

$$e'(z_i', F) \leq e'(z_i, F) + \eta_i \tag{6}$$

uund somit, wegen (4): $e'(Z', F) \leqq e'(Z, F)$, also, da die Voraussetzungen in Bezug auf Z, Z' symmetrisch sind: $e'(Z', F) = e'(Z, F)$, w. z. b. w.

Daraus folgt [6]), dass $e(Z, F)$, $e'(Z, F)$ durch unendlich kleine Verschiebungen von Z innerhalb F — nicht geändert werden.

3. Ist $F_1 \subset F$, z ein algebraischer Zyklus in F_1, so ist [7]):

$$\begin{aligned} e(z, F) + 2\varrho_1(F_1, F) &\geqq e(z, F_1); \\ e'(z, F) + 2\varrho_1(F_1, F) &\geqq e'(z, F_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Es genügt die zweite Ungleichung zu beweisen. Ist D ein τ-Komplex in F, mit $D \to tz$, so kann man durch eine $\varrho_1(F_1, F)$-Verschiebung D in einen τ_1-Komplex D_1 in F_1 verwandeln, unter Festhaltung der Randes. Dann ist $\tau_1 \leqq \tau + 2\varrho_1(F_1, F)$, und $D_1 \to tz$, woraus die zweite Ungleichung (7) folgt.

5. Hilfssatz. Es sei $F_\omega = \prod_{j=1}^{\infty} F_j$; $F_\omega' = \prod_{j=1}^{\infty} F_j'$; $F_{j+1} \subset F_j$: $F_{j+1}' \subset F_j'$; $F_j' \subset F_j$; Z_j ein r-dimensionaler wahrer Zyklus in F_j', der in F_j berandet und der Bedingung $e'(Z_j, F_j') \geqq \lambda > 0$ genügt. Es existiert in F_ω' ein r-dimensionaler wahrer Zyklus Z der in F_ω berandet und der Bedingung $e'(Z, F_\omega') \geqq \lambda$ genügt.

Sind dabei die Z_j Zyklen mod m, so ist auch Z ein Zyklus mod m.

[6]) *Dim* 24, S. 180.

[7]) $\varrho_1(A, B)$ bezeichnet die Hausdorffsche Entfernung der abgeschlossenen Mengen A, B.

Es sei $Z_j = (z_{j,1}, z_{j,2}, \dots)$ dabei ist $z_{j,k}$ ein $\delta_{j,k}$-Zyklus in F_j' und $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{j,k} = 0$.

Da Z_j in F_j berandet, existiert ein $\delta_{j,k}'$-Komplex $C_{j,k}$ derart dass:

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{j,k}' = 0; \quad C_{j,k} \to z_{j,k}. \tag{8}$$

Nun kann man die Folge $\{k_j\}$ so bestimmen dass:

$$\delta_{j,k_j} \leq \delta_{j,k_j}' \leq \frac{1}{2^j} \tag{9}$$

$$e'(z_{j,k_j}, F_j') \geqq \lambda - \frac{1}{2^j}. \tag{10}$$

Wir bezeichnen mit σ_j die grössere der beiden Zahlen $\varrho_1(F_j, F_\omega)$, $\varrho_1(F_j', F_\omega')$; es ist $\lim \sigma_j = 0$. Nun verschieben wir jeden Eckpunkt von z_{j,k_j} nach F_ω', jeden Eckpunkt von C_{j,k_j} der kein Eckpunkt von z_{j,k_j} ist nach F_ω. Dies kann durch eine σ_j-Verschiebung bewerkstelligt werden. z_{j,k_j} verwandelt sich in einen algebraischen $\frac{1}{2^j} + 2\sigma_j$-Zyklus z_j, C_{j,k_j} in einen $\frac{1}{2^j} + 2\sigma_j$-Komplex C_j wobei:

$$C_j \to z_j. \tag{11}$$

Mithin ist $Z = (z_1, z_2, \dots)$ ein wahrer Zyklus in F_ω', welcher in F_ω berandet.

Betrachten wir den Zyklus $Y_p = (z_1, \dots, z_{p-1}, z_{p,k_p}, z_{p+1,k_{p+1}}, \dots)$; es ist dies ein wahrer Zyklus in F_p'. Wegen **3** hat man für $j \geqq p$:

$$e'(z_{j,k_j}, F_p') \geqq e'(z_{j,k_j}, F_j') - 2\varrho_1(F_p', F') \geqq \lambda - \frac{1}{2^j} - 2\sigma_p \tag{12}$$

und daher:

$$e'(Y_p, F_p') \geqq \lambda - 2\sigma_p. \tag{13}$$

Da aber Z aus Y_p durch unendlich kleine Verschiebung innerhalb F_p' entsteht so ist nach **2**: $e'(Z, F_p') = e'(Y_p, F_p')$ und daher:

$$e'(Z, F_p') \geqq \lambda - 2\sigma_p. \tag{14}$$

Wegen $F_p' \supset F_\omega'$ folgt à fortiori $e'(Z, F_\omega') \geqq \lambda - 2\sigma_p$, und, da p beliebig ist: $e'(Z, F_\omega') \geqq \lambda$, w. z. b. w.

5. Im folgenden betrachten wir wahre Zyklen nach konstantem Modul m, und bezeichnen mit $\mathfrak{A}(Z, F)$ *die Klasse aller in F enthaltenen Träger* [8]) *des wahren Zyklus Z, mit $\Gamma_r^{(m)}(F)$ die Klasse der r-dimensionalen, wesentlichen* [9]) *Zyklen, welche in F beranden*, und setzen:

$$a(Z, F) = \sup_{A \in \mathfrak{A}(Z, F)} e'(Z, A). \tag{15}$$

6. *Der r-te Dimensionsgrad mod m von F wird mit $a_r^m(F)$ bezeichnet und definiert durch die Relationen:*

$$\text{(I)} \quad a_r^m(F) = \sup_{Z \in \Gamma_{r-1}^{(m)}(F)} a(Z, F) \qquad \text{wenn } \Gamma_r^{(m)}(F) \neq 0$$

$$\text{(II)} \quad a_r^m(F) = 0 \qquad \text{wenn } \Gamma_{r-1}^{(m)}(F) = 0.$$

7. **Satz 1.** *$a_r^m(F)$ ist positiv dann und nur dann, wenn $\Delta^m(F) \geqq r$.*

Wenn $\Delta^m(F) < r$, so ist $\Gamma_{r-1}^{(m)}(F) = 0$ [10]). Wenn dagegen $\Delta^m(F) \geqq r$, so ist $\Gamma_{r-1}^{(m)}(F) \neq 0$ [11]); sei $Z \in \Gamma_{r-1}^{(m)}(F)$; es existiert ein $A' \in \mathfrak{A}(Z, F)$ derart dass Z in A' total unhomolog Null ist, daher $e'(Z, A') > 0$ und somit nach (15) und (I): $a(Z, F) > 0$ $a_r^m(F) > 0$ w. z. b. w.

8. **Satz 2.** *Es sei $\lambda > 0$; die durch die Ungleichung $a_r^m(F) \geqq \lambda$ ausgedrückte Eigenschaft ist induktiv d. h. aus $F_\omega = \prod_{j=1}^{\infty} F_j$; $F_{j+1} \subset F_j$; $a_r^m(F_j) \geqq \lambda$ folgt $a_r^m(F_\omega) \geqq \lambda$.*

Es sei $\eta > 0$. Zu jedem j existiert ein $Z_j \in \Gamma_{r-1}^{(m)}(F_j)$ und ein $A_j \in \mathfrak{A}(Z_j, F_j)$ derart, dass:

$$e'(Z_j, A_j) \geqq \lambda - \eta. \tag{16}$$

Wir bestimmen eine Folge $\{q_j\}$ derart dass die Folge $\{A_{q_j}\}$ im Hausdorff'schen Sinne konvergiert und setzen: $F'_j = \overline{\sum_{i=j}^{\infty} A_{q_i}}$. Dann ist $F'_j \subset F_{q_j}$ und:

$$F'_\omega = \prod_{j=1}^{\infty} F'_j = \lim A_{q_j} = \lim F'_j; \quad F'_{j+1} \subset F'_j. \tag{17}$$

[8]) *Dim* 35, S. 190.
[9]) *Dim* 35, S. 190.
[10]) *Dim* 40, S. 194.
[11]) *Dim* 90, S. 229.

Wir bestimmen jetzt die Zahl p so dass für $j \geqq p$, $\varrho_1(A_{q_j}, F'_j) < \eta$ wird. Wegen 3 und (16) ist dann

$$e'(Z_{q_j}, F'_j) \geqq \lambda - 3\eta \quad \text{für} \quad j \geqq p. \tag{16}$$

Wendet man den Hilfsatz 4 auf die Folgen: $F_{q_p}, F_{q_{p+1}}, \ldots, F'_1, F'_2, \ldots$ und $Z_{q_p}, Z_{q_{p+1}}, \ldots$ an so folgt die Existenz eines $(r-1)$-dimensionalen Zyklus (mod m) Z in F'_ω welcher in F_ω berandet und der Bedingung $e'(Z, F'_\omega) \geqq \lambda - 3\eta$ genügt. Also ist $Z \in \Gamma_{r-1}^{(m)}(F'_\omega)$, $a(Z, F_\omega) \geqq \lambda - 3\eta$, und somit $a_r^m(F_\omega) \geqq \lambda - 3\eta$. Da aber η beliebig klein ist, so folgt $a_r^m(F_\omega) \geqq \lambda$ w. z. b. w.

9. Aus 6, 7, 8 folgt unmittelbar, dass $a_r^m(F)$ eine monoton wachsende, oberhalb stetige Mengenfunktion ist. Im Potenzraum [12]) 2^F bilden daher die Mengen $F' \subset F$ für die $\Delta^m(F') \geqq r$ ist — eine F_σ-Menge. Wenn $a_r^m(F) \geqq \lambda > 0$ so enthält F eine Teilmenge, welche im Bezug auf die Eigenschaft $a_r^m(F) \geqq \lambda$ irreduzibel ist. Wenn $F_\omega = \prod_{j=1}^{\infty} F_j$, $F_{j+1} \subset F_j$, so ist $a_r^m(F_\omega) = \lim a_r^m(F_j)$; ist $\Delta^m(F_j) = r$ so ist $\Delta^m(F_\omega) = r$ dann und nur dann, wenn $\lim a_r^m(F_j) > 0$ [13]).

10. **Satz über dimensionelle Komponenten** [2]). *Wenn F unabzählbar viele dimensionelle Komponenten (mod m) besitzt so hat die Menge derselben die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Es genügt im Beweis den ich für den Fall der mengentheoretischen Dimension gegeben habe [1]) $d_k(F)$ durch $a_r^m(F)$ zu ersetzen und den 4 Hauptsatz von Alexandroff [14]) anzuwenden.

[12]) 2^F Potenzraum von $F =$ Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von F, metrisiert durch die Hausdorffsche Entfernung.
[13]) Analogon zum Urysohnschen Durchschnittsatz. Fund Math. VIII.
[14]) *Dim* 68. S. 214—215.

Nowy Targ 2/VIII 1932.