Betrachtet man die abstrakten Funktionen

$$\varphi_n(y) = f_n(x, y),$$

so folgt aus (6) und (7)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \varphi(y) \quad \text{für fast alle } y, \tag{8}$$

$$|\varphi_n(y)| \leqq g(y). \tag{9}$$

Von den Funktionen $\varphi_n(y)$ sieht man sofort, dass sie stetige und demnach summierbare Funktionen sind. Nach (8) und (9) ist auch $\varphi(y)$ summierbar, q. e. d.

Zur Vervollständigung der Betrachtung beweisen wir noch den

Satz II. *Es sei $f(x, y)$ in C summierbar. Von der abstrakten Funktion*

$$\varphi(y) = f(x, y)$$

gilt

$$\int_B \varphi(y)\, dy = \int_B f(x, y)\, dy.$$

Beweis. Aus (8) und (9) folgt

$$\int_B \varphi(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_B \varphi_n(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x, y)\, dy.$$

Aus dem Approximationscharakter der $f_n(x, y)$ folgt (eventuell für eine Teilfolge)

$$\lim_{n\to\infty} \int_B |f(x, y) - f_n(x, y)|\, dy = 0 \quad \text{für fast alle } x,$$

und hieraus

$$\int_B f(x, y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x, y)\, dy = \int_B \varphi(y)\, dy.$$

q. e. d.

Über nicht plättbare Kurven.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1. K. Kuratowski hat folgenden Satz bewiesen [1]).

Eine nicht-plättbare Peanokurve [2]) die nur endlich viele topologische Kreise enthält, enthält topologisch einen der beiden folgenden Streckenkomplexe K_1, K_2: K_1 besteht aus 2 Punkttrippeln und 9 bis auf Endpunkte paarweise fremden Strecken, welche jeden Punkt des einen Tripels mit jedem Punkt des anderen verbinden; K_2 besteht aus 5 Punkten und 10 bis auf Endpunkte paarweise fremden Strecken, welche je zwei dieser Punkte miteinander verbinden.

2. Ich werde folgende von Kuratowski ausgesprochene Vermutung beweisen:

Satz 1. *Eine wesentlich nicht plättbare Peanokurve enthält topologisch einen der beiden Streckenkomplexe K_1, K_2.* Dabei wird eine Kurve als *wesentlich nicht plättbar* bezeichnet, wenn sie durch kleine Abbildungen [3]) nicht in ebene Kurven übergeführt werden kann.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem zitierten Satz von Kuratowski und aus dem folgenden Überführungssatz:

3. **Satz 2.** *Eine Peanokurve lässt sich für jedes $\eta > 0$ in einen in ihr liegenden Bogenkomplex η-transformieren.*

Nach dem Mengerschen Einbettungssatz [4]) kenn man ohne

[1]) Fund. Math. XV, p. 271—283.

[2]) Peanokurve = stetig durchlaufbares, eindimensionnales Kontinuum.

[3]) Die Begriffe: kleine Abbildung, η-Abbildung, η-Transformation — nach Alexandroff: Annals of Mathematics. Second Series 30, p. 102—103.

[4]) K. Menger: Dimensionstheorie (1928), p. 296.

Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen dass die Peanokurve C im 3-dimensionalen Euklidischen Raume liegt. Wir bestimmen $\eta_1 > 0$ so dass [1]):

(1) $$(x \in C)\,(y \in C)\,(\varrho(x, y) < 3\eta_1) \rightarrow \varrho_c(x, y) < \tfrac{1}{3}\eta.$$

Nach dem Alexandroff'schen Überführungsatz [2]) existiert eine η_1-Transformation f von C in einen Streckenkomplex S, welcher als η_1-Komplex aufgefasst werden kann, also:

(2) $$S = \sum_{i=1}^{l} I_i; \quad I_i\text{-Strecke}; \quad \delta(I_i) < \eta_1.$$

Seien: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Eckpunkte von S; a_{p_i}, a_{q_i} die Endpunkte von I_i, und $b_j \in f^{-1}(a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Dann ist:

(3) $$\varrho(a_j, b_j) < \eta_1; \quad \varrho(b_{p_i}, b_{q_i}) < 3\eta_1; \quad \varrho_c(b_{p_i}, b_{q_i}) < \tfrac{1}{3}\eta.$$

Also existiert ein einfacher Bogen $L_i \subset C$ mit Endpunkten b_{p_i}, b_{q_i}, und:

(4) $$\delta(L_i) < \tfrac{1}{3}\eta.$$

Wir setzen: $M_1 = N_1 = L_1$. Ist für $1 < k \leqq l$, M_{k-1} ein Bogenkomplex in C, so bestimmen wir $\eta^{(k)} > 0$ so dass:

(5) $$(x \in M_{k-1})\,(y \in M_{k-1})\,(\varrho(x, y) < \eta^{(k)}) \rightarrow \varrho_{M_{k-1}}(x, y) < \tfrac{1}{3}\eta.$$

$\overline{L_k - M_{k-1}}$ besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen einfachen Bögen, welche untereinander und mit M_{k-1} bis auf Endpunkte fremd sind. Diejenigen unter ihnen die einen der Punkte b_{p_k}, b_{q_k} enthalten, oder einen Durchmesser $\geqq \eta^{(k)}$ haben bilden eine endliche Folge $\{J_{k,r}\}$, $r = 1, 2, \ldots, r_k$, die übrigen eine endliche Folge oder eine Nullfolge $\{J'_{k,s}\}$, $s = 1, 2, \ldots$ Wir setzen:

(6) $$M_k = M_{k-1} + \sum_{r=1}^{r_k} J_{k,r}.$$

[1]) $\varrho_c(x, y)$ bezeichnet die Relativentfernung von x und y auf C; vrgl. Mazurkiewicz Fund. Math. I, p. 167—169.

[2]) P. Alexandroff, l. c., p. 120.

Beide Endpunkte von $J'_{k,s}$ liegen auf M_{k-1}, und ihre Entfernung ist $< \eta^{(k)}$. Auf Grund von (5) kann man daher $J'_{k,s}$ durch einen koextremalen Bogen $J''_{k,s} \subset M_{k-1}$ ersetzen so dass die Folge $\{J''_{k,s}\}$, $s = 1, 2, \ldots$ wenn unendlich, eine Nullfolge ist und dass:

(7) $$\delta(J''_{k,s}) < \tfrac{1}{3}\eta.$$

Sei

(8) $$N_k = \left(L_k - \sum_{s=1}^{\infty} J'_{k,s}\right) + \sum_{s=1}^{\infty} J''_{k,s}.$$

Nach (6) ist jedes M_k, insb. M_l ein Bogenkomplex in C. Es ist weiter:

(9) $$M_k - M_{k-1} \subset N_k \subset M_k$$

also:

(10) $$\sum_{k=1}^{l} N_k = M_l.$$

Schliesslich ist N_k eine Peanokurve, welche b_{p_k}, b_{q_k} enthält und wegen (4) und (7) hat man:

(11) $$x \in N_k \rightarrow \varrho(b_{p_k}, x) < \tfrac{2}{3}\eta.$$

Sei $\varphi_k(x)$ eine für $x \in I_k$ stetige Funktion die den Bedingungen genügt:

(12) $$\varphi_k(a_{p_k}) = b_{p_k}; \quad \varphi_k(a_{q_k}) = b_{q_k}; \quad \varphi_k(I_k) = N_k.$$

Sei $\varphi(x)$ eine für $x \in S$, durch die Gleichungen $\varphi(x) = \varphi_k(x)$ wenn $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots, l$ definierte Funktion; sie ist eindeutig und stetig auf S. Wir setzen schliesslich:

(13) $$\psi(y) = \varphi(f(y)) \quad y \in C$$

ψ ist stetig auf C, und wegen (10) ist:

(14) $$\psi(C) = \varphi(S) = M_l.$$

Da $f(y) \in S$, so existiert für jedes y ein j derart dass $f(y) \in I_j$, also $\psi(y) \in N_j$.

Also wegen (11):

(15) $$\varrho(y, \psi(y)) \leqq \varrho(y, f(y)) + \varrho(f(y), \psi(y)) < \eta_1 + \varrho(f(y), a_{p_j}) + \\ + \varrho(a_{p_j}, b_{p_j}) + \varrho(b_{p_j}, \psi(y)) < 3\eta_1 + \tfrac{2}{3}\eta \leqq \eta$$

ψ ist also eine η-Transformation, welche C in den Bogenkomplex $M_l \subset C$ überführt w. z. b. w.

4. Ich bemerke noch, dass sich Satz I umkehren lässt. Man kann nämlich zeigen dass K_1 durch genügend kleine Abbildungen stets in Kurven überführt wird die K_1 topologisch enthalten, K_2 dagegen in Kurven, die K_1 oder K_2 topologisch enthalten.

Warszawa 14/III 1933.