wobei c_n eine (komplexe) Konstante ist. Dann gilt (12) falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \delta_n \quad \text{endlich},$$

wobei

$$\delta_n = t_n - t_{n-1}.$$

Dies ist erfüllt, falls für eine passende Konstante K

$$\delta_n = \frac{K}{n^3}, \quad c_n = \sqrt{n}.$$

Nun ist

$$\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3}, \ldots),$$

wobei

$$\alpha_{kn} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_n e^{-2\pi i k t}\, dt,$$

also ist

$$|\alpha_{nn}| = \frac{|c_n|}{n} \cdot \left| \frac{1 - e^{-2\pi i n \delta_n}}{2\pi} \right|.$$

Daher ist für $n \geqq n_0$ und eine passende Konstante A

$$|\alpha_n| \geqq |\alpha_{nn}| \geqq \frac{A}{\sqrt{n}},$$

also

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \infty\ ^{1}).$$

1) Ein anderes Gegenbeispiel, in welchem die Funktion $f(x)$ sogar stetig ist, findet man in der Note: *Abstrakte Funktionen und die Besselsche Ungleichung*. Erscheint in der Göttinger Nachrichten. [Zusatz bei der Korrektur].

München, den 20. Dez. 1932.

Eine Bemerkung zum Satz von Fubini.

Von

S. Bochner (München).

Die Variable x durchlaufe eine Punktmenge A eines k-dimensionalen Euklidischen Raumes, und die Variable y eine Punktmenge B eines l-dimensionalen Euklidischen Raumes. Die aus A und B zusammengesetzte Punktmenge des $(k+l)$-dimensionalen Raumes bezeichnen wir mit C. In C sei eine (komplexwertige) Funktion $f(x, y)$ definiert, welche für jedes y aus B summierbar ist in A, und wir fragen: *welche Gesetzmässigkeit in bezug auf y ist erforderlich, damit $f(x, y)$ summierbar ist in C?* Falls noch vorausgesetzt wird, dass $f(x, y)$ messbar ist in C, so ist nach Fubini für die Summierbarkeit von $f(x, y)$ notwendig und hinreichend, dass die Funktion

$$\int_A |f(x, y)|\, dx$$

summierbar ist in B. Aber grade die Voraussetzung der Messbarkeit von $f(x, y)$ wollen wir *nicht* machen.

Wir betrachten sämtliche in A summierbaren Funktionen $f(x)$, $g(x), \ldots$, als Elemente $\xi, \eta, \ldots$, eines abstrakten Raumes $\mathfrak{f}$, in welchem wir definieren:

1) eine Addition

$$\xi + \eta = f(x) + g(x),$$

2) eine Multiplikation mit beliebigen komplexen Konstanten

$$a\,\xi = a f(x),$$

und

3) einen absoluten Betrag

$$|\xi| = \int_A |f(x)|\, dx.$$

Dieser Raum $\mathfrak{f}$ ist ein komplex-linearer Raum, wie wir ihn in der voraufgehenden Note betrachtet haben [1]). Auf die in B definierten *abstrakten* Funktionen

$$\xi = \varphi(y)$$

kann man, wie l. c. gezeigt wurde, die Begriffe und Sätze der Lebesgueschen Integrationstheorie weitgehend übertragen. Nunmehr können wir die obige Frage folgendermassen beantworten.

Satz I. *Die Funktion $f(x, y)$ sei für jedes y aus B summierbar in A. Damit sie als Funktion von (x, y) summierbar ist in C, ist notwendig und hinreichend, dass die abstrakte Funktion*

$$\varphi(y) \equiv f(x, y)$$

summierbar ist in B.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Bedingung hinreicht. Falls $\varphi(x)$ summierbar ist in B, so kann man summierbare *endlichwertige* Funktionen $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y), \ldots$ angeben, derart dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_B |\varphi(y) - \varphi_n(y)|\, dy = 0, \tag{1}$$

und demnach auch

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_B |\varphi_m(y) - \varphi_n(y)|\, dy = 0. \tag{2}$$

Betrachtet man die Funktionen $\varphi_n(y)$ als Funktionen von (x, y),

$$\varphi_n(y) \equiv f_n(x, y),$$

so findet man sofort, dass die $f_n(x, y)$ summierbar in C sind, also ist

$$\int_B |\varphi_m(y) - \varphi_n(y)|\, dy = \int_B dy \int_A |f_m(x, y) - f_n(x, y)|\, dx =$$
$$= \int_C |f_m(x, y) - f_n(x, y)|\, dx\, dy.$$

Aus (2) folgt daher

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_C |f_m(x, y) - f_n(x, y)|\, dx\, dy = 0.$$

[1]) S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fundamenta Math. XX, (1933), p. 262.

Also gibt es eine in C summierbare Funktion $f_0(x, y)$, für welche

$$\lim_{n\to\infty} \int_B dy \int_A |f_0(x, y) - f_n(x, y)|\, dx = \tag{3}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_C |f_0(x, y) - f_n(x, y)|\, dx\, dy = 0.$$

Indem man eventuell zu einer Teilfolge der Gesamtfolge $f_n(x, y)$ übergeht, kann man auf Grund von (3) annehmen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_0(x, y) - f_n(x, y)|\, dx = 0 \quad \text{für fast alle } y. \tag{4}$$

Wenn man noch einmal zu einer Teilfolge der $f_n(x, y)$ übergeht, kann man auf Grund von (1) annehmen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi(y) - \varphi_n(y)| = 0 \quad \text{für fast alle } y,$$

d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f(x, y) - f_n(x, y)|\, dx = 0 \quad \text{für fast alle } y. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt, dass die Funktionen $f(x, y)$ und $f_0(x, y)$ für fast alle y in A äquivalent sind, nach den Grundlagen zum Satz von Fubini sind sie also in C äquivalent. Also ist $f(x, y)$ summierbar in C.

Es sei umgekehrt $f(x, y)$ summierbar in C. Durch Kombination des Satzes, dass man jede summierbare Funktion durch gleichmässig stetige Funktionen im Mittel approximieren kann, mit dem Satz von Fubini kann man eine Folge von Funktionen $f_n(x, y)$ mit den folgenden Eigenschaften angeben:

1) Jede Funktion $f_n(x, y)$ ist gleichmässig stetig in C und verschwindet ausserhalb eines endlichen Intervalls,

2) es ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f(x, y) - f_n(x, y)|\, dx = 0 \quad \text{für fast alle } y \tag{6}$$

und

3) es gibt eine *reelle* in B summierbare Funktion $g(y)$, für welche

$$\int_A |f_n(x, y)|\, dx \leqq g(y). \tag{7}$$

Betrachtet man die abstrakten Funktionen

$$\varphi_n(y) = f_n(x, y),$$

so folgt aus (6) und (7)

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \varphi(y) \quad \text{für fast alle } y,$$

$$(9) \qquad |\varphi_n(y)| \leqq g(y).$$

Von den Funktionen $\varphi_n(y)$ sieht man sofort, dass sie stetige und demnach summierbare Funktionen sind. Nach (8) und (9) ist auch $\varphi(y)$ summierbar, q. e. d.

Zur Vervollständigung der Betrachtung beweisen wir noch den

Satz II. *Es sei $f(x, y)$ in C summierbar. Von der abstrakten Funktion*

$$\varphi(y) = f(x, y)$$

gilt

$$\int_B \varphi(y)\, dy = \int_B f(x, y)\, dy.$$

Beweis. Aus (8) und (9) folgt

$$\int_B \varphi(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_B \varphi_n(y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x, y)\, dy.$$

Aus dem Approximationscharakter der $f_n(x, y)$ folgt (eventuell für eine Teilfolge)

$$\lim_{n\to\infty} \int_B |f(x, y) - f_n(x, y)|\, dy = 0 \quad \text{für fast alle } x,$$

und hieraus

$$\int_B f(x, y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x, y)\, dy = \int_B \varphi(y)\, dy,$$

q. e. d.

Über nicht plättbare Kurven.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1. K. Kuratowski hat folgenden Satz bewiesen [1]).

Eine nicht-plättbare Peanokurve [2]) die nur endlich viele topologische Kreise enthält, enthält topologisch einen der beiden folgenden Streckenkomplexe K_1, K_2: K_1 besteht aus 2 Punkttrippeln und 9 bis auf Endpunkte paarweise fremden Strecken, welche jeden Punkt des einen Tripels mit jedem Punkt des anderen verbinden; K_2 besteht aus 5 Punkten und 10 bis auf Endpunkte paarweise fremden Strecken, welche je zwei dieser Punkte miteinander verbinden.

2. Ich werde folgende von Kuratowski ausgesprochene Vermutung beweisen:

Satz 1. *Eine wesentlich nicht plättbare Peanokurve enthält topologisch einen der beiden Streckenkomplexe K_1, K_2.* Dabei wird eine Kurve als *wesentlich nicht plättbar* bezeichnet, wenn sie durch kleine Abbildungen [3]) nicht in ebene Kurven übergeführt werden kann.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem zitierten Satz von Kuratowski und aus dem folgenden Überführungssatz:

3. **Satz 2.** *Eine Peanokurve lässt sich für jedes $\eta > 0$ in einen in ihr liegenden Bogenkomplex η-transformieren.*

Nach dem Mengerschen Einbettungssatz [4]) kenn man ohne

[1]) Fund. Math. XV, p. 271—283.

[2]) Peanokurve = stetig durchlaufbares, eindimensionnales Kontinuum.

[3]) Die Begriffe: kleine Abbildung, η-Abbildung, η-Transformation — nach Alexandroff: Annals of Mathematics. Second Series 30, p. 102—103.

[4]) K. Menger: Dimensionstheorie (1928), p. 296.