Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind.

Von

S. Bochner (München).

§ 1. Fragestellung.

I. Gegeben sei ein vollständiger, metrischer linear-komplexer Raum $\mathfrak{f}$. Darunter verstehen wir einen Raum mit den folgenden Eigenschaften. Für je zwei Elemente ist eine (innerhalb $\mathfrak{f}$ ausführbare) kommutative, assoziative, eindeutig umkehrbare Addition $\xi+\eta$ erklärt. Überdies ist eine (innerhalb $\mathfrak{f}$ ausführbare) Multiplikation $a\xi$ der Elemente ξ mit beliebigen komplexen Zahlen a definiert, gemäss den Vorschriften:

$$a(b\xi)=(ab)\xi,\quad a\xi+b\xi=(a+b)\xi,\quad a\xi+a\eta=a(\xi+\eta),$$
$$1\xi=\xi,\quad 0\xi=0,$$

wobei in der letzten Gleichung links die Zahl Null und rechts das Nullelement des Raumes gemeint ist. Weiterhin ist jedem Element ξ eine endliche reelle Zahl $|\xi|$, der *Betrag* von ξ, zugeordnet, gemäss den Vorschriften:

$$|0|=0,\quad |\xi|>0 \quad \text{für} \quad \xi\neq 0,$$
$$|a\xi|=|a|\,|\xi|,\quad |\xi+\eta|\leqq|\xi|+|\eta|,$$

und $|\xi-\eta|$ ist als Entfernung der Punkte ξ und η erklärt. Und zum Schluss wird noch vorausgesetzt, dass jede (im Sinne dieser Entfernungsdefinition) konvergente Folge gegen ein gewisses Element des Raumes konvergiert. — Wir bemerken, dass unter anderem aus

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty}|\xi_n|=|\xi|.$$

II. Zu den Räumen $\mathfrak{f}$ gehört insbesondere der Ring aller Komplexen Zahlen.

III. Weiterhin betrachten wir einen kartesischen Raum R_k, von einer festen Dimension k, dessen Punkte wir mit x, y, etc. bezeichnen werden.

Unter einer Funktion schlechthin werden wir eine Zuordnung von Elementen aus $\mathfrak{f}$ zu Punkten aus R_k verstehen. Wir sagen, dass eine Funktion auf einer Punktmenge A von R_k gegeben ist, falls diejenigen Punkte aus A, in denen sie entweder gar nicht oder nicht eindeutig definiert ist, das (Lebesguesche) Mass null haben. Ausserdem werden wir in R_k auch reellwertige oder komplexwertige Funktionen zu betrachten haben, die wir aber immer als solche bezeichnen werden.

Für beliebige $\xi_1,\dots,\xi_n$ aus $\mathfrak{f}$ und Zahlen $c_1,\dots,c_n$ ist auch $c_1\xi_1+\dots+c_n\xi_n$ ein Element aus $\mathfrak{f}$, daher kann man etwa für stetige Funktionen $\xi=f(x)$ auf quadrierbaren Mengen A das Riemann'sche Integral mit den üblichen Eigenschaften definieren [1]). Aber für eine gewisse Anwendung, die an einer anderen Stelle erörtert werden soll, benötigen wir die volle Verallgemeinerung der Lebesgueschen Theorie; und da nicht alle Punkte dieser Verallgemeinerung ganz selbstverständlich sind, so wollen wir ihre Grundzüge kurz auseinandersetzen. Hierbei werden wir die Lebesguesche Theorie für reelle und komplexe Funktionen als gegeben ansehen und stark ausnutzen.

§ 2. Messbarkeit.

I. Eine Funktion $g(x)$ auf einer messbaren Punktmenge A heisse endlichwertig, falls A in endlich viele messbare Teilmengen zerfällt, auf denen $g(x)$ konstant ist; und die Funktion $f(x)$ heisse *messbar* auf A, falls es endlichwertige Funktionen $g_n(x)$ gibt, derart dass

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x) \quad \text{für fast alle } x \text{ aus } A.$$

Jede endlichwertige Funktion ist demnach messbar. Die Messbarkeit ist offenbar eine additive Eigenschaft; sie überträgt sich von A auf jede messbare Teilmenge von A, und von den abzähl-

[1]) Vgl. M. Kerner, Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis, Prace matematyczno-fizyczne, 40 (1932), 163—177, und dort zitierte Literatur.

baren vielen Punktmengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ auf ihre Summe. Weiterhin ist zugleich mit der endlichwertigen Funktion $g(x)$ auch $|g(x)|$ und daher zugleich mit $f(x)$ auch $|f(x)|$ eine messbare Funktion.

II. Falls die auf der Punktmenge A messbaren Funktionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots \tag{1}$$

fast überall konvergieren, — die Grenzfunktion nennen wir $f(x)$ — so sind sie daselbst auch asymptotisch gegen $f(x)$ konvergent, d. h. auf jeder Teilmenge M von endlichem Masse sind die Funktionen (1) nach Ausschluss einer Punktmenge von beliebig kleinem Masse gleichmässig gegen $f(x)$ konvergent.

Denn für beliebiges m und n ist

$$|f_m(x) - f_n(x)| \tag{2}$$

messbar auf A; und da (2) für $n \to \infty$ fast überall gegen

$$|f_m(x) - f(x)| \tag{3}$$

konvergiert, so ist auch (3) messbar. Die Funktionen (3) sind aber für $m \to \infty$ fast überall gegen 0 konvergent. Nach dem Satz von Egoroff sind sie daher asymptotisch gegen 0 konvergent; q. e. d.

III. Umgekehrt findet man leicht, dass man aus einer Folge von messbaren Funktionen (1), welche asymptotisch gegen $f(x)$ konvergieren, eine Teilfolge auswählen kann, welche fast überall gegen $f(x)$ konvergiert [1].

IV. Aus II und III erhält man die folgende Charakterisierung der messbaren Funktionen. Eine Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann messbar, wenn eine Folge von endlichwertigen Funktionen $g_n(x)$ existiert, welche asymptotisch gegen $f(x)$ konvergiert.

V. Wenn messbare Funktionen (1) fast überall gegen eine Funktion $f(x)$ konvergieren, so ist $f(x)$ messbar. Denn $f(x)$ ist der asymptotische Limes der Funktionen (1). Und da jede Funktion $f_n(x)$ der asymptotische Limes von endlichwertigen Funktionen ist, so ist, wie man unschwer findet, auch $f(x)$ durch endlichwertige Funktionen asymptotisch approximierbar.

[1] Vgl. z. B. die Betrachtungen in E. W. Hobson, Theory of Functions of a Real Variable, Second Edition, Volume II, 1926, § 168.

VI. Das Produkt zweier Funktionen ist nicht definiert, weil ja das Produkt zweier Elemente aus $\mathfrak{f}$ nicht definiert ist. Aber das Produkt einer (messbaren) Funktion mit einer (messbaren) komplexwertigen Funktion ist wiederum eine (messbare) Funktion.

§ 3. Summierbarkeit.

I. Eine Funktion $f(x)$ auf A nennen wir summierbar, falls daselbst $f(x)$ messbar und die (reelle) Funktion $|f(x)|$ summierbar ist. Als Integral

$$I(f, A) = \int_A f(x)\, dx$$

werden wir ein eindeutiges Element $\alpha = I(f, A)$ aus $\mathfrak{f}$ bezeichnen, welches die folgenden Eigenschaften besitzen wird:

1) $|I(f, A)| \leqq I(|f|, A)$,

2) falls $f(x)$ konstant $= \alpha$ ist, so ist

$$I(f, A) = \alpha \cdot mA,$$

wobei mA das Mass von A bezeichnet,

3) $I(c_1 f_1 + c_2 f_2, A) = c_1 I(f_1, A) + c_2 I(f_2, A)$,

4) falls $A = A_1 + A_2 + \ldots$ und $A_m A_n = 0$ für $m \neq n$, dann ist

$$I(f, A) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f, A_n),$$

5) falls die summierbaren Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ auf A eine summierbare reelle Schranke $S(x)$ besitzen,

$$|f_n(x)| \leqq S(x) \text{ für fast alle } x \text{ aus } A,$$

und falls die Funktionen $f_n(x)$ für fast alle x konvergieren, so ist

$$I(\lim_{n\to\infty} f_n(x), A) = \lim_{n\to\infty} I(f_n(x), A). \tag{4}$$

II. Wenn ein Integral $I(f, A)$ mit den angegebenen Eigenschaften existieren soll, so kommt auf Grund von 1)—4) für eine endlichwertige Funktion $g(x)$, welche auf den Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Werte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ annimmt, nur die Grösse

$$I(g, A) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \cdot mA_\nu$$

in Frage. Umgekehrt besitzt diese Grösse die Eigenschaften 1)—4). Das Weitere wird sich aus einem Hilfssatz ergeben.

III. *Hilfssatz.* Gegeben sei auf einer festen Punktmenge A eine lineare Gesamtheit von summierbaren Funktionen $f(x)$, für welche auf allen messbaren Teilmengen A' von A ein den Eigenschaften 1)—4) genügendes Funktional $I(f, A')$ definiert ist. Falls eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ aus der Gesamtheit eine summierbare reelle Schranke besitzt und falls die Folge $f_n(x)$ fast überall konvergiert, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n, A). \tag{5}$$

Beweis. Die Folge f_n ist asymptotisch konvergent. Auf jeder endlichen Teilmenge B, auf welcher sie gleichmässig konvergiert, existiert offenbar

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n, B).$$

Die Existenz von (5) ergibt sich nunmehr aus Folgendem: zu jedem ε gibt es einen endlichen Würfel W, so dass

$$|I(f_n, A-AW)| \leqq I(S(x), A-AW) \leqq \varepsilon,$$

und bei festem W gibt es zu jedem ε ein $\delta = \delta(\varepsilon, S)$, so dass für jede Teilmenge C von AW, deren Mass kleiner als δ ist,

$$|I(f_n, C)| \leqq I(S(x), C) \leqq \varepsilon.$$

IV. Es sei nun $f(x)$ eine beliebige summierbare Funktion auf A und $G(x)$ eine summierbare reelle Funktion, für welche

$$|f(x)| < G(x) \quad \text{für fast alle } x \text{ aus } A.$$

Nach der Definition der Messbarkeit gibt es zu $f(x)$ eine Approximationsfolge von endlichwertigen Funktionen $g_n^*(x)$. Die Funktionen

$$g_n(x) = \begin{cases} g_n^*(x) & \text{für } |g_n^*(x)| \leqq G(x) \\ 0 & \;\;\text{„} \;\; |g_n^*(x)| > G(x) \end{cases}$$

sind wiederum eine Approximationsfolge von endlichwertigen Funktionen, und es gilt

$$|g_n(x)| \leqq G(x) \quad \text{für fast alle } x \text{ aus } A.$$

Nach dem Hilfssatz existiert daher

$$\lim_{n\to\infty} I(g_n, A).$$

Wenn man eine andere Approximationsfolge $h_n(x)$ herausgreift, welche zu einer summierbaren Schranke $H(x)$ gehört, so existiert demnach auch

$$\lim_{n\to\infty} I(h_n, A).$$

Diese beiden Grenzwerte stimmen überein, was daraus folgt, dass die kombinierte Folge

$$k_{2n-1}(x) = g_n(x), \quad k_{2n}(x) = h_n(x),$$

gleichfalls eine summierbare Schranke besitzt, $K(x) = G(x) + H(x)$, und dass demnach auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} I(k_n, A)$$

existiert.

Das Integral $I(f, A)$ definieren wir nunmehr durch den eben aufgestellten invarianten Grenzwert, und man verifiziert ohne Schwierigkeiten, dass es die Eigenschaften 1)—5) besitzt.

§ 4. Der Satz von Fubini.

Dieser Satz besteht aus den folgenden drei Behauptungen.

1⁰. Die Funktion $f(t_1, \ldots, t_k)$ sei summierbar in R_k. Wenn man die Variablen $t_1, \ldots, t_k$ irgendwie in zwei Gruppen aufteilt, die wir $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_n$ nennen $(m+n=k)$, so gibt es eine Nullmenge E des R_n, von solcher Art, dass das wiederholte Integral

$$\int_{R_n-E} dy \int_{R_m} f\,dx$$

existiert. Es hat den Wert

$$\int_{R_k} f\,dt. \tag{6}$$

2⁰. Wenn man die Variablen $t_1, \ldots, t_k$ irgendwie in Gruppen aufteilt:

$$z_\pi = (t_{\pi 1}, t_{\pi 2}, \ldots, t_{\pi k_\pi}) \qquad \pi = 1, \ldots, p$$

$$k_\pi \geqq 1, \; k_1 + \ldots + k_p = k,$$

so gibt es eine zu $f(t_1, \ldots, t_k)$ äquivalente (d. h. nur in einer Nullmenge des R_k abweichende) Funktion $\varphi(t_1, \ldots, t_k)$, für welche das Integral

$$(7) \qquad \int\limits_{R_{k_1}} d z_1 \int\limits_{R_{k_2}} d z_2 \ldots \int\limits_{R_{k_p}} \varphi \, d z_p$$

vorhanden ist. Sein Wert beträgt

$$\int\limits_{R_k} \varphi \, d t,$$

der seinerseits mit (6) übereinstimmt.

3⁰. Die Funktion $f(t_1, \ldots, t_k)$ sei messbar in R_k. Damit sie daselbst auch summierbar ist, ist folgendes hinreichend. Es gibt: 1. eine zu f äquivalente Funktion ψ, 2. eine nicht negative Schrankenfunktion φ von ψ, $(\varphi \geqq |\psi|)$, etwa die Funktion $\varphi = |\psi|$ selber, und 3. eine Variablengruppierung z_π von der Art, dass das Integral (7) vorhanden ist.

Beweis ad 1⁰. Falls $f(t)$ nur einen der zwei Werte α und 0 annimmt, wobei α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{f}$ ist, so setze man $f(t) = \alpha F(t)$. Für die komplexwertige Funktion $F(t)$ gilt unsere Behauptung, also gilt sie auch für $f(t)$. Ebenso gilt sie auch für Summen von „einwertigen" Funktionen, d. h. für endlichwertige Funktionen. Die allgemeinen Funktionen $f(t)$ erledigen sich nunmehr durch Grenzübergang auf Grund des folgenden Hilfssatzes.

Gegeben sei in R_k eine Folge von Funktionen

$$(8) \qquad f_1(t), \; f_2(t), \; f_3(t), \ldots,$$

die eine summierbare reelle Schranke $S(t)$ besitzen, und die Folge (8) sei fast überall gegen $f(t)$ konvergent. Falls von den Funktionen (8) bekannt ist, dass sie der Behauptung 1⁰ genügen, so fällt auch $f(t)$ unter die Behauptung 1⁰.

Denn da die Funktionen $f_\lambda(t) \equiv f_\lambda(x, y)$ für fast alle t gegen $f(t) \equiv f(x, y)$ konvergieren, so ist (nach der grundlegenden Fubinischen Eigenschaft von Nullmengen) für fast alle y

$$\lim_{\lambda \to \infty} f_\lambda(x, y) = f(x, y) \quad \text{für fast alle } x,$$

und

$$|f_\lambda(x, y)| \leqq S(x, y) \quad \text{für fast alle } x.$$

Da nun aber für fast alle y $S(x, y)$ eine summierbare Funktion

von x ist, so sind nach der Eigenschaft 5) aus § 3 die Funktionen

$$g_\lambda(y) = \int\limits_{R_m} f_\lambda(x, y) \, dx$$

mit $\lambda \to \infty$ für fast alle y gegen

$$g(y) = \int\limits_{R_m} f(x, y) \, dx$$

konvergent. Nach Voraussetzung sind die Funktionen $g_\lambda(y)$ summierbar in R_n, und da sie in der Funktion

$$\int\limits_{R_m} S(x, y) \, dx$$

eine gemeinsame Schranke besitzen, so ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{R_n - E} dy \int\limits_{R_m} f_\lambda(x, y) \, dx = \int\limits_{R_n - E} dy \int\limits_{R_m} f(x, y) \, dx;$$

ebenso ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_{R_k} f_\lambda(t) \, dt = \int\limits_{R_k} f(t) \, dt.$$

Und da für jedes λ die linken Integrale übereinstimmen, so stimmen auch die rechte Integrale überein, wie behauptet wurde.

Beweis ad 2⁰. Analog wie ad 1⁰.

Beweis ad 3⁰. Die Behauptung überträgt sich sofort von den reellen Funktionen auf die allgemeinen Funktionen.

§ 5. Differenzierbarkeit.

I. Gegeben sei, etwa im ganzen R_k, eine summierbare Funktion $f(x)$, und wir betrachten wie in § 3 ihr unbestimmtes Integral $I(f, A)$. Wir greifen einen festen Punkt x heraus, und setzen A als einen Würfel mit dem Mittelpunkt x und der Kantenlänge $2a$ an. Falls $f(x)$ komplexwertig ist, so gilt bekanntlich von

$$\varphi(f; x, a) \equiv \frac{I(f, A)}{(2a)^k},$$

dass

$$\lim_{a \to 0} \varphi(f; x, a) = f(x) \quad \text{für fast alle } x.$$

Dasselbe gilt auch für unsere allgemeinen Funktionen $f(x)$. Denn erstens gilt es für „einwertige" und demnach auch endlichwertige Funktionen. Für eine beliebige summierbare Funktion $f(x)$ betrachte man endlichwertige Funktionen $f_n(x)$, welche fast überall gegen $f(x)$ konvergieren.

Dann ist, für festes n,

$$\overline{\lim_{a\to 0}}\,|\varphi(f;x,a)-f(x)| \leqq \overline{\lim_{a\to 0}}\,|\varphi(|f-f_n|;x,a)| + \\ + \overline{\lim_{a\to 0}}\,|\varphi(f_n;x,a)-f_n(x)| + |f_n(x)-f(x)|,$$

und die rechte Seite ist für fast alle x

$$= 2\,|f_n(x)-f(x)|.$$

Da aber die Folge $f_n(x)$ fast überall gegen $f(x)$ konvergiert, so schliesst man hieraus

$$\overline{\lim_{a\to 0}}\,|\varphi(f;x,a)-f(x)| = 0 \quad \text{für fast alle } x,$$

q. e. d.

II. Die wichtigste Folgerung hieraus ist diejenige, dass zwei summierbare Funktionen immer dann äquivalent sind, wenn ihre Integrale für alle messbaren Punktmengen (oder auch nur für alle Würfel) übereinstimmen.

III. Das unbestimmte Integral $I(f,A)$ ist eine additive totalstetige Mengenfunktion. Die Totalstetigkeit besagt, dass es zu jedem ε ein δ gibt, derart dass für disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ aus $\sum_{\nu=1}^{\infty} m\,A_\nu \leqq \delta$ folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |I(f,A_\nu)| \leqq \varepsilon.$$

Die Umkehrung, dass jede additive totalstetige Mengenfunktion ein unbestimmtes Integral ist, scheint nicht einfach beweisbar zu sein, und soll in einem anderen Zusammenhang (über *beliebige* additive Intervallfunktionen) untersucht werden.

IV. Wenn auf einem linearen beschränkten Intervall $a \leqq x \leqq b$ eine summierbare Funktion $f(x)$ und eine summierbare komplexe Funktion $g(x)$ gegeben sind, so gilt für die unbestimmten Integrale

$$F(x) = \int^x f(x)\,dx, \quad G(x) = \int^x g(x)\,dx$$

die Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b F(x)\,G'(x)\,dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F'(x)\,G(x)\,dx.$$

Denn sie gilt offensichtlich für einwertige und demnach auch endlichwertige $f(x)$; für allgemeine $f(x)$ ergibt sie sich durch einen passenden Grenzübergang.

V. Für unsere allgemeinen Funktionen gilt auch der folgende Satz von Lebesgue[1]), welcher für trigonometrische Reihen und Integrale eine wichtige Anwendung zulässt. Falls $f(x)$ im linearen Intervall $a \leqq x \leqq b$ summierbar ist, so gibt es einen massgleichen Kern M des Intervalls, von der Art, dass für fast alle x die Funktion $\Phi(t) = |f(t)-f(x)|$ in *allen* Punkten von M die Ableitung ihres unbestimmten Integrals ist. Wir wiederholen den Beweis von Lebesgue, da er etwas abgeändert werden muss. Man nehme eine Folge von endlichwertigen Funktionen, welche $f(x)$ approximieren, und bezeichne deren gesamten Werte mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Dann kann man für fast jedes x zu jedem ε ein α_n angeben, so dass

$$|f(x)-\alpha_n| \leqq \varepsilon. \tag{8}$$

Es gibt einen massgleichen Kern M von (a,b), so dass für jedes t_0 aus M und jedes n

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} |f(t)-\alpha_n|\,dt = |f(t_0)-\alpha_n|. \tag{9}$$

Aus (8) folgt

$$\big|\,|f(t_0)-f(x)| - |f(t_0)-\alpha_n|\,\big| \leqq \varepsilon$$

und

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} |f(t)-f(x)|\,dt - \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} |f(t)-\alpha_n|\,dt\right| \leqq \varepsilon.$$

Auf Grund von (9) gibt es daher für jedes t_0 aus M und fast jedes x zu jedem ε ein δ, so dass für $|t-t_0| \leqq \delta$

[1]) H. Lebesgue, Séries trigonométriques 1906, S. 13.

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}|f(t)-f(x)|\,dt-|f(t_0)-f(x)|\right|\leqq 3\varepsilon;$$

und hieraus folgt unsere Behauptung.

§ 6. Approximation im Mittel.

I. Wir sagen, dass wir (in R_k) die summierbare Funktion $f(x)$ durch summierbare Funktionen einer Menge $\{\varphi\}$ im Mittel approximieren können, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein φ gibt, derart dass

$$\int_{R_k}|f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqq\varepsilon.$$

Nach § 3 kann man $f(x)$ im Mittel approximieren durch endlichwertige Funktionen. Nun kann man jede summierbare *komplexe* Funktion durch eine stetige (komplexe) Funktion im Mittel approximieren, welche ausserhalb eines endlichen Intervalles verschwindet. Auf Grund dessen kann man jede einwertige, also auch jede endlichwertige, und demnach auch jede beliebige summierbare Funktion durch stetige Funktionen im Mittel approximieren, von denen jede ausserhalb eines endlichen Intervalles verschwindet.

II. Man kann zur Approximation im Mittel hinterher auch Treppenfunktionen verwenden. Eine Treppenfunktion ist eine endlichwertige Funktion, welche in gewissen achsenparallelen Intervallen konstant ist und ausserhalb eines endlichen Intervalles verschwindet.

III. Aus I. folgt der Satz von Lebesgue, dass jede summierbare Funktion $f(x_1,\ldots,x_k)$ des R_k im Mittel stetig ist; d. h. dass zu jedem ε ein δ vorhanden ist, derart dass

$$\int_{R_k}|f(x_1+h_1,\ldots,x_k+h_k)-f(x_1,\ldots,x_k)|\,dx<\varepsilon$$

für

$$|h_1|+\ldots+|h_k|\leqq\delta.$$

IV. Gegeben sei in R_k eine Folge von summierbaren Funktionen $f_n(x)$, für welche

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{R_k}|f_m(x)-f_n(x)|\,dx=0.$$

Dann gibt es [vgl. Hobson, l. c.] eine asymptotisch konvergente Teilfolge, und deren Grenzfunktion $f(x)$ ist von der speziellen Teilfolge unabhängig und genügt der Relation

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_k}|f(x)-f_n(x)|\,dx=0.$$

V. Eine Funktion $f(x)$ in R_k rechnen wir zur Klasse L^p, $p\geqq 1$, falls die Funktion messbar und $|f(x)|^p$ auf R_k summierbar ist. Die Summe zweier Funktionen aus L^p ist eine Funktion derselben Klasse. Falls die Funktion $f_1(x)$ zur Klasse L^p und die *komplexe* Funktion $f_2(x)$ zur Klasse L^q gehört und falls $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, so ist $f_1(x)\,f_2(x)$ eine Funktion aus L^1 und es ist

$$\left|\int_{R_k}f_1f_2\,dx\right|\leqq\left[\int_{R_k}|f_1|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_{R_k}|f_2|^{\frac{1}{q}}\,dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Falls für Funktionen $f_1(x)\,f_2(x),\ldots$ aus L^p die Relation

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{R_k}|f_m(x)-f_n(x)|^p\,dx=0$$

besteht, so gibt es eine Funktion $f(x)$ aus L^p für welche

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_k}|f(x)-f_n(x)|^p\,dx=0$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_k}|f_n(x)|^p\,dx=\int_{R_k}|f(x)|^p\,dx.$$

Alle diese Behauptungen beweist man ganz ähnlich wie für reelle Funktionen. Nun könnte man vielleicht meinen, dass die Analogie zu den reellen Funktionenklassen L^p *restlos* besteht. Das ist aber nicht der Fall, wie wir im nächsten § noch sehen werden.

§ 7. Fouriersche Reihen.

Es sei $f(t)$ eine summierbare Funktion *einer* Variablen mit der Periode 1. Man kann die Fourier-Koeffizienten

$$a_n \doteq \int_0^1 f(t)\,e^{-2\pi int}\,dt$$

bilden und mit ihnen die Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i n t}$$

ansetzen. Verschiedene Eigenschaften der gewöhnlichen Fourier-Reihen bleiben erhalten, von denen wir einige anführen wollen.

Es ist

$$\lim_{|n| \to \infty} \alpha_n = 0.$$

Denn für Treppenfunktionen ist dies leicht festzustellen und die allgemeinen Funktionen kann man durch Treppenfunktionen im Mittel approximieren.

Ähnlich erkennt man leicht, dass die Konvergenz der Fourierreihe in einem Punkte nur von lokalen Verhalten der Funktion abhängt. Und man könnte ohne erhebliche Mühe beweisen, dass die üblichen Kriterien für Konvergenz in einem Punkte und für gleichmässige Konvergenz in einem Intervall erhalten bleiben.

Von den Fejérschen Summen

$$\sigma_n(t) = \int_0^1 f(t+\tau) \frac{\sin^2 \pi n \tau}{n \sin^2 \pi \tau} d\tau$$

erkennt man leicht, dass sie in jedem Stetigkeitspunkt von $f(x)$ gegen den Funktionswert konvergieren, und unter Heranziehung von § 5, V beweist man, wie im Reellen, dass für beliebige $f(t)$ aus L die Fejérschen Summen für fast alle t gegen $f(t)$ konvergieren.

Hieraus folgt insbesondere der Eindeutigkeitssatz, dass zwei Funktionen aus L deren Fourierreihen gleich sind für fast alle t übereinstimmen.

Es sei $f(t)$ eine Funktion aus L^2 und es sei

$$g(t) \sim \sum_{-\infty}^{n} \beta_n e^{2\pi i n t}$$

eine komplexe Funktion aus L^2. Dann ist

$$\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{-n}^{n} \alpha_\nu \beta_{-\nu}, \tag{10}$$

was sich leicht daraus ergibt, dass für komplexes $g(t)$ aus L^2

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left| g(t) - \sum_{-n}^{n} \beta_\nu e^{2\pi i \nu t} \right|^2 dt = 0.$$

Wenn insbesondere $f(x)$ selber komplex ist, und wenn $g(t) = \overline{f(t)}$, so folgt aus (10)

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

Diese letzte Relation braucht aber keineswegs zu gelten, wenn $f(t)$ nicht komplex ist. Sie gilt noch nicht einmal mit „$\geqq$" statt „$=$". Wir wollen nämlich ein Gegenbeispiel mit

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \infty$$

angeben.

Als Elemente aus $\mathfrak{f}$ betrachten wir Folgen von komplexen Zahlen x_n,

$$\xi = (x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

für welche

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots \tag{11}$$

endlich ist. Die Addition $\xi + \eta$ wird durch Addition der n-ten Komponenten ($n = 1, 2, 3, \ldots$), das Produkt $a\xi$ durch Multiplikation der n-ten Komponente mit a, und der Betrag $|\xi|$ durch den Wert (11) erklärt.

Es sei

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots \to 1.$$

Man erkennt leicht, dass eine Funktion $\xi = f(t)$ welche in jedem Intervall $t_{n-1} \leqq t < t_n$ konstant ist, eine messbare Funktion ist, und sie gehört zu L^2, falls darüber hinaus

$$\int_0^1 \left(\sum_1^{\infty} |x_n(t)| \right)^2 dt \text{ endlich.} \tag{12}$$

Nun sei insbesondere in $t_{n-1} \leqq t < t_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$x_n(t) = c_n$$
$$x_\nu(t) = 0 \quad \text{für} \quad \nu \neq n,$$

wobei c_n eine (komplexe) Konstante ist. Dann gilt (12) falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \delta_n \quad \text{endlich,}$$

wobei

$$\delta_n = t_n - t_{n-1}.$$

Dies ist erfüllt, falls für eine passende Konstante K

$$\delta_n = \frac{K}{n^3}, \quad c_n = \sqrt{n}.$$

Nun ist

$$\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3}, \ldots),$$

wobei

$$\alpha_{kn} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_n e^{-2\pi i k t} dt,$$

also ist

$$|\alpha_{nn}| = \frac{|c_n|}{n} \cdot \left| \frac{1 - e^{-2\pi i n \delta_n}}{2\pi} \right|.$$

Daher ist für $n \geqq n_0$ und eine passende Konstante A

$$|\alpha_n| \geqq |\alpha_{nn}| \geqq \frac{A}{\sqrt{n}},$$

also

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \infty\ [1]).$$

[1]) Ein anderes Gegenbeispiel, in welchem die Funktion $f(x)$ sogar stetig ist, findet man in der Note: *Abstrakte Funktionen und die Besselsche Ungleichung*. Erscheint in der Göttinger Nachrichten. [Zusatz bei der Korrektur].

München, den 20. Dez. 1932.

Eine Bemerkung zum Satz von Fubini.

Von

S. Bochner (München).

Die Variable x durchlaufe eine Punktmenge A eines k-dimensionalen Euklidischen Raumes, und die Variable y eine Punktmenge B eines l-dimensionalen Euklidischen Raumes. Die aus A und B zusammengesetzte Punktmenge des $(k+l)$-dimensionalen Raumes bezeichnen wir mit C. In C sei eine (komplexwertige) Funktion $f(x, y)$ definiert, welche für jedes y aus B summierbar ist in A, und wir fragen: *welche Gesetzmässigkeit in bezug auf y ist erforderlich, damit $f(x, y)$ summierbar ist in C?* Falls noch vorausgesetzt wird, dass $f(x, y)$ messbar ist in C, so ist nach Fubini für die Summierbarkeit von $f(x, y)$ notwendig und hinreichend, dass die Funktion

$$\int_A |f(x, y)|\, dx$$

summierbar ist in B. Aber grade die Voraussetzung der Messbarkeit von $f(x, y)$ wollen wir *nicht* machen.

Wir betrachten sämtliche in A summierbaren Funktionen $f(x)$, $g(x), \ldots$, als Elemente $\xi, \eta, \ldots$, eines abstrakten Raumes $\mathfrak{f}$, in welchem wir definieren:

1) eine Addition

$$\xi + \eta = f(x) + g(x),$$

2) eine Multiplikation mit beliebigen komplexen Konstanten

$$a\,\xi = a f(x),$$

und

3) einen absoluten Betrag

$$|\xi| = \int_A |f(x)|\, dx.$$