Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem.

Von

Th. Skolem (Bergen).

In einer Abhandlung mit dem Titel „*On a problem of formal logic*“ [1]) hat F. P. Ramsay einen kombinatorischen Satz bewiesen und davon eine Anwendung gemacht auf die Entscheidung über die Erfüllbarkeit gewisser Aussagen. Den Satz stellt er auf sowohl für eine unendliche Menge — dann ist der Beweis sehr leicht — wie für endliche Mengen; das letztere ist eigentlich das, worauf es ankommt. Es scheint mir, dass der kombinatorische Satz für endliche Mengen einfacher und übersichtlicher bewiesen werden kann, als Ramsay es tut, wodurch man auch — jedenfalls in vielen Fällen — bessere Resultate erhält. Weiter scheint es mir, dass auch die Anwendung des Satzes auf das Entscheidungsproblem viel einfacher durchgeführt werden kann, jedenfalls wenn man die Möglichkeit einer linearen Anordnung des Bereiches der Individuen annimmt [2]). Dies soll alles im folgenden gemacht werden.

Satz I. *Es sei*

$$m \geqq \frac{\mu^{\mu n-\mu+2}-1}{\mu-1}.$$

Werden die aus m Dingen gebildeten Paare in μ getrennte Systeme verteilt, so gibt es n Dinge unter den m derart, dass alle aus diesen n Dingen gebildeten Paare in einem und demselben Systeme auftreten.

[1]) Proceedings of the London Math. Society (2), 30.

[2]) Diese Einschränkung ist ziemlich belanglos, da es kaum Interesse hat andere Bereiche als endliche oder abzählbar unendliche zu betrachten.

Beweis: Das System der m Dinge heisse S_1. Die μ getrennten Systeme, worin alle $\binom{m}{2}$ Paare der m Dinge verteilt werden sollen, heissen $C_1, \ldots, C_\mu$.

Es sei a_1 ein beliebiges Element von S_1. Dann gibt es

$$m_1 \geqq \frac{m-1}{\mu}$$

Dinge in S_1, welche mit a_1 zusammen Paare bilden, die alle in demselben D_1 vorkommen, wobei D_1 eines den Systeme C ist. Das System der m_1 Dinge heisse S_2, und a_2 sei ein beliebiges Ding in S_2. Es gibt dann wieder

$$m_2 \geqq \frac{m_1-1}{\mu}$$

Dinge in S_2, welche mit a_2 Paare bilden, die alle in demselben Systeme D_2 vorkommen, wo D_2 wieder eines der C ist. In dieser Weise kann fortgesetzt werden. Nun wird

$$m_r \geqq \frac{\mu^{\mu n-\mu+2-r}-1}{\mu-1}.$$

Denn dies ist richtig für $r=0$, indem m_0 natürlich m bedeutet. Die Formel gelte für r. Dann bekommt man

$$m_{r+1} \geqq \frac{m_r-1}{\mu} \geqq \frac{\dfrac{\mu^{\mu n-\mu+2-r}-1}{\mu-1}-1}{\mu} = \frac{\mu^{\mu n-\mu+2-r}-1-\mu+1}{\mu(\mu-1)} = \\ = \frac{\mu^{\mu n-\mu+1-r}-1}{\mu-1},$$

d. h. die Formel gilt allgemein.

Es wird deshalb auch

$$m_{\mu(n-1)+1} \geqq \frac{\mu-1}{\mu-1} = 1,$$

so dass die Systeme $S_1, S_2, \ldots, S_{\mu(n-1)+2}$ alle mindestens 1 Element enthalten; jedes S_s ist ja in S_r enthalten, wenn $r \leqq s$ ist. Alle Dinge in S_{i+1} bilden mit dem Elemente a_i aus S_i ausschliesslich Paare in D_i. In dieser Weise entspricht der Reihe $S_1, S_2, \ldots, S_{\mu(n-1)+2}$ die Reihe

$$D_1, D_2, \ldots, D_{\mu(n-1)+1},$$

worin jedes D entweder C_1 oder C_2 oder ... oder C_μ ist. Dann gibt es aber nach dem Schubfachschluss unter den Zahlen $1, 2, \ldots, \mu(n-1)+1$ mindestens n, sie mögen $i_1 < i_2 < i_3 \ldots < i_n$ heissen, derart, dass $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_n}$ alle dasselbe System C sind. Ich behaupte, dass dann alle aus den n Dingen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ gebildeten Paare diesem C gehören müssen. Man betrachte das Paar (a_{i_r}, a_{i_s}), wo $r < s$. Da a_{i_s} zu S_{i_s} gehört, und $i_r + 1 \leqq i_s$ ist, so dass S_{i_s} in S_{i_r+1} enthalten ist, so gehört a_{i_s} auch zu S_{i_r+1}. Also gehört (a_{i_r}, a_{i_s}) zu dem System D_{i_r}, d. h. dem betreffenden C.

Hierdurch ist der Satz bewiesen.

Dieser Satz soll jetzt verallgemeinert werden. Zuerst definiere ich rekurrierend die Funktionen $f(\nu, \mu, m)$ und $g(\varrho, \nu, \mu, m)$. Es soll

$$f(1, \mu, m) = \left[\frac{m-1}{\mu}\right] + 1, \quad g(0, \nu-1, \mu, m) = m$$

und

$$(\alpha) \qquad g(\varrho+1, \nu-1, \mu, m) = f(\nu-1, \mu, g(\varrho, \nu-1, \mu, m) - 1)$$

gesetzt werden. Dann ist

$$f(\nu, \mu, m)$$

die grösste ganze nicht negative Zahl n, für welche

$$(\beta) \qquad g(\mu n - \mu + 1, \nu - 1, \mu, m) \geqq 1$$

ist. Um diese Rekursion zu rechtfertigen muss aber gezeigt werden, dass wirklich $g(\varrho, \nu-1, \mu, m)$ in bezug auf wachsendem ϱ abnimmt. Dies geschieht durch Induktion. Es sei schon bewiesen, dass $f(\nu-1, \mu, m) < m$ ist. Dann ist nach (α)

$$g(\varrho+1, \nu-1, \mu, m) \leqq g(\varrho, \nu-1, \mu, m) - 2.$$

Da $g(0, \nu-1, \mu, m) = m$ und $g(\mu n - \mu + 1, \nu-1, \mu, m) \geqq 1$ ist, folgt daraus $\mu n - \mu + 1 \leqq \frac{m-1}{2}$, woraus folgt, $n < m$, d. h. $f(\nu, \mu, m) < m$. Hierdurch ist die Sache erledigt, wenn man bloss bemerkt, dass $f(1, \mu, m) < m$ ist.

Satz 2. *Die Funktionen $f(\nu, \mu, m)$ und $g(\varrho, \nu, \mu, m)$ wachsen ins Unendliche, wenn m ins Unendliche wächst.*

Beweis. Dies gilt augenscheinlich für $f(1, \mu, m)$. Ausserdem gilt es für $g(0, \nu, \mu, m)$ und wegen (α) erkennt man dann, dass

$g(\varrho+1, \nu, \mu, m)$ ins Unendliche wächst mit m, falls $f(\nu, \mu, m)$ und $g(\varrho, \nu, \mu, m)$ es tun. Deshalb wächst $g(\varrho, \nu, \mu, m)$ ins Unendliche mit m, wenn $f(\nu, \mu, m)$ es tut. Also wächst $g(\varrho, \nu, \mu, m)$ ins Unendliche mit m für $\nu = 1$. Der Satz sei schon bewiesen für $\nu - 1$, μ und ϱ beliebig. Es sei $n = f(\nu, \mu, m)$. Nach der Annahme kann man m' so gross wählen, dass

$$g(\mu n + 1, \nu - 1, \mu, m') \geqq 1$$

wird. Dann ist nach (β) $f(\nu, \mu, m') \geqq n + 1$, d. h.

$$f(\nu, \mu, m') > f(\nu, \mu, m).$$

Infolgedessen wächst die ganzzahlige Funktion $f(\nu, \mu, m)$ über alle Grenzen mit m. Dies gilt dann nach dem schon gesagten auch für $g(\varrho, \nu, \mu, m)$. Hierdurch ist der Satz bewiesen.

Satz 3. *Werden die $\binom{m}{\nu}$ aus m Dingen gebildeten ν-Tupel in μ fremde Systeme $C_1 \ldots C_\mu$ verteilt, so gibt es $f(\nu, \mu, m)$ dieser Dinge derart, dass sobald $f(\nu, \mu, m) > \nu - 1$ ist, alle daraus gebildeten ν-Tupel in demselben C vorkommen.*

Beweis. Der Satz gilt offenbar für $\nu = 1$. Er sei für $\nu - 1$ gültig. Dann zeige ich, dass er für ν gilt.

Das System der m Dinge heisse S_1, und a_1 sei eines der Dinge. Die aus den übrigen $m-1$ Dingen ableitbaren $(\nu-1)$-Tupel zerfallen dann in μ getrennte Systeme, je nachdem sie mit a_1 vereinigt ein ν-Tupel in C_1 oder in $C_2 \ldots$ oder in C_μ geben. Nach der Annahme gibt es dann $m_1 = f(\nu-1, \mu, m-1)$ dieser Dinge, deren $(\nu-1)$-Tupel mit a_1 ν-Tupel in D_1 bilden, wo D_1 eines der C ist. Es sei S_2 das System dieser m_1 Dinge, und a_2 sei ein Element darin. Dann gibt es wieder $m_2 = f(\nu-1, \mu, m_1 - 1)$ der übrigen Dinge, deren $(\nu-1)$-Tupel mit a_2 zusammen ν-Tupel in D_2 geben, wo D_2 eines der C ist. In dieser Weise wird fortgesetzt.

Wenn also $m_{\mu(n-1)+1}$ noch $\geqq 1$ ist, d. h. nach der rekurrierenden Definition $n = f(\nu, \mu, m)$, so ist keines der Systeme

$$S_1, \; S_2, \ldots, \; S_{\mu(n-1)+2}$$

leer. Jedem S_{r+1} entspricht ein D_r in der Reihe der Systeme C, und zwar so, dass falls m_r noch $> \nu - 1$ ist, die aus den m_r Dingen in S_{r+1} gebildeten $(\nu-1)$-Tupel mit dem Elemente a_r aus S_r ausschliesslich ν-Tupel in D_r geben. Es gibt deshalb n Indizes

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_n$$

derart, dass $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_n}$ alle dasselbe C sind. Ich behaupte, dass alle aus

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$$

gebildeten ν-Tupel zu diesem C gehören.

Man betrachte nämlich das ν-Tupel

$$(a_{i_r}, a_{i_s}, \ldots, a_{i_u}),$$

wo $r < s < \ldots < u$. Da $i_r < i_s < \ldots < i_u$ ist, so ist $i_r + 1 \leqq i_s < \ldots < i_u$, so dass $a_{i_s}, \ldots, a_{i_u}$ alle zu S_{i_r+1} gehören. Folglich gehört das betrachtete ν-Tupel zu D_{i_r} d. h. dem betreffenden C. Der Satz ist somit bewiesen.

Diese kombinatorische Sätze sollen jetzt angewandt werden zum Beweis eines Satzes über „Zählaussagen“ der Form [1])

(1) $$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, U(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wo U eine in elementarer Art (d. h. mittels Konjunktion, Disjunktion und Negation allein) aus gewissen Urfunktionen $A(x_1), \ldots$ $B(x_1, x_2), \ldots$ u. s. w. aufgebaute Aussagenfunktion ist; darunter soll aber auch die besondere Funktion $I(x_r, x_s)$, die Identität, vorkommen. Streng genommen ist die gegebene Aussage also keine eigentliche Zählaussage; denn die Bedeutung von I bezieht sich ja auf alle Aussagen nach der Regel

$$(\Phi) \cdot I(x, y) \rightarrow (\Phi(x) \rightleftarrows \Phi(y)).$$

Zuerst soll die Aussage (1) etwas geändert werden. Man kann sie ja ebenso gut in der Form

(2) $$(x_1)\, U_1\, (x_1, x_2)'\, U_2 \ldots (x_1, x_2, \ldots, x_n)'\, U_n$$

schreiben, wo U_1 die Aussage $U(x_1, x_1, \ldots, x_1)$ bedeutet, U_2 die

[1]) Ramsay betrachtet übrigens auch einige andere Aussagen. Der Kürze halber gehe ich hier nicht auf diese ein; sie gestatten eine ähnliche Behandlung.

Konjunktion aller Aussagen, welche aus $U(x_1, \ldots, x_n)$ entstehen, wenn auf alle Arten sämtliche Symbole x entweder mit x_1 oder x_2 (d. h. gewöhnlich teils x_1 und teils x_2) ersetzt werden u. s. w. bis U_n eben die Konjunktion aller aus $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durch Vertauschung der x entstehenden Aussagen ist, während der Apostroph nach der Parenthese mit den Allzeichen bedeutet, dass die Variablen immer verschiedene Individuen darstellen sollen oder m. a W. es bedeutet $(x_1, x_2, \ldots, x_r)'\ U(x_1, \ldots, x_r)$ dasselbe wie

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r)\, \bar{I}(x_1, x_2)\, \bar{I}(x_1, x_3) \ldots \bar{I}(x_{r-1}, x_r) \rightarrow U(x_1, \ldots, x_r).$$

Offenbar kann man aber, wenn man will, wieder (2) in der Form

(3) $$(x_1, x_2, \ldots, x_n)'\ V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

schreiben, wo $V(x_1, \ldots, x_n)$ gleich ist der Konjunktion

$$U_1(x_1)\, U_1(x_2) \ldots U_1(x_n)\, U_2(x_1, x_2)\, U_2(x_1, x_3) \ldots U_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Augenscheinlich ist V dann vollkommen symmetrisch in allen x. Weil die x alle verschieden sind, können die in V vorkommenden Funktionen I bezw. $\bar{I}$ durch 0 bezw. 1 (d. h. die Werte „falsch“ bezw. „wahr“) ersetzt werden, so dass jetzt in V bloss die übrigen Funktionen $A, B, \ldots$ vorkommen.

Ist schon $V(x_1, \ldots, x_n)$ ein Widerspruch, so ist die Aussage (1) nie erfüllt in Bereichen mit mindestens n Elementen. Sonst gibt es gewisse Bestimmungen der Urfunktionen derart, dass V wahr wird. Die Zahl dieser Bestimmungen sei M. Um diejenigen dieser Bestimmungen zu unterscheiden, die in einander übergehen durch Vertauschung der x, muss man die x linear geordnet annehmen und diese Anordnung festhalten. Sind nun $y_1, \ldots, y_n$ auch n Individuen, die teilweise mit den x identisch sein können, und für welche eine bestimmte lineare Anordnung gegeben ist, so soll eine Bestimmung der Urfunktionen, für die $V(y_1, \ldots, y_n)$ wahr wird, dieselbe heissen wie eine solche für die x, wenn die beiden Bestimmungen aus einander hervorgehen durch Ersatz der x durch die y mit Beibehaltung der Anordnung.

Satz 4. *Es sei N unendlich gross oder jedenfalls so gross, dass $f(n, M, N) \geqq 2n - 1$ ist. Notwendig und hinreichend für die Erfüll-*

barkeit der Aussage (1) *in einem Bereiche mit N Elementen ist es dann, dass sie schon in einem Bereiche mit $2n-1$ Elementen erfüllt ist für eine und dieselbe Bestimmung der Urfunktionen für alle n-Tupel darin.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Denn denkt man sich eine lineare Anordnung des Bereiches worin (3) erfüllt ist, so ist hierdurch jedes n-Tupel linear geordnet nämlich so, wie seine Elemente im Bereiche geordnet sind, und deshalb ist für jedes n-Tupel bestimmt, was für eine Bestimmung der Urfunktionen vorliegt. Infolgedessen kann man die n-Tupel in M Systeme verteilen nach der Bestimmung, die dafür gilt. Dann gibt es aber [1]) $2n-1$ Elemente derart, dass alle daraus gebildeten n-Tupel zu demselben System gehören, d. h. für alle diese n-Tupel gilt dieselbe Bestimmung.

Die Bedingung ist hinreichend: In der Tat ist die Bedingung hinreichend für die Erfüllbarkeit der Aussage in jedem Bereiche mit Elementzahl $\geqq 2n-1$. Es sei nämlich die gegebene Aussage erfüllt in einem Bereiche mit $2n-1$ Elementen und zwar so, dass für jedes n-Tupel dieselbe Bestimmung B der Urfunktionen gilt. Dann wird die Aussage erfüllt in jedem Bereiche mit grösserer Elementzahl einfach dadurch, dass man diesen Bereich linear ordnet und dann für jedes n-Tupel die Bestimmung B gelten lässt. Es kann nämlich zwischen der Bestimmung B für $x_1, \ldots, x_n$ und derselben Bestimmung B für $y_1, \ldots, y_n$ kein Widerspruch auftreten. Dies ist selbstverständlich, wenn man zwei getrennte n-Tupel hat. Fallen sie aber teilweise zusammen, so kommen die x und die y schon in einem Teilbereiche mit $2n-1$ Elementen vor, und nach der Annahme war ja die gegebene Aussage ohne Widerspruch erfüllt in einem solchen Bereiche für die Bestimmung B für alle n-Tupel darin.

Hierdurch ist Satz 4 bewiesen.

Ich sagte in der Einleitung, dass das von mir benutzte Beweisverfahren jedenfalls in vielen Fällen bessere Resultate gibt als das Ramsaysche. Jedenfalls ist dies richtig für die Verteilung von Paaren — von den kleinsten Werten von μ und n abgesehen —; wahrscheinlich ist es dann auch richtig für die Verteilung der ν-Tupel, wenn $\nu > 2$ ist, was ich jedoch nicht näher untersucht habe. Für den Fall $\nu = 2$ aber bekommt Ramsay [2]) die Zahl $n!!\ldots!$

[1]) Nach Satz 3.

[2]) L. c. S. 270.

mit $\mu-1$ Fakultätszeichen als untere Schranke der Werte von m derart, dass n Dinge vorkommen, deren Paare alle in demselben der μ Systeme vorkommen, während die oben gefundene untere Schranke gleich ist der kleinsten Zahl die grösser oder gleich ist

$$\frac{\mu^{\mu n-\mu+2}-1}{\mu-1}.$$

Nun ist $2^{2n}-1 < n!$, so oft $n > 8$ ist, und wenn $\mu > 2$ ist, findet man leicht, dass stets

$$\frac{\mu^{\mu n-\mu+2}-1}{\mu-1}+1 < n!!\ldots! \quad (\mu-1 \text{ Fakultätszeichen}),$$

sobald $n > 3$ ist. Ist $\mu > 3$, so genügt schon $n > 2$.