Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles.

Par

C. Kuratowski et S. Ulam (Lwów).

1. Imaginons donnés deux ensembles compacts A et B tels qu'il existe une transformation continue de A en B, mais supposons, que A ne soit pas homéomorphe à B.

La deuxième hypothèse signifie que, pour chaque transformation continue $y=f(x)$ de A en B, il existe un $y \in B$ tel que l'ensemble $f^{-1}(y)$ (c. à d. l'ensemble des x tels que $y=f(x)$) ne se réduit pas à un seul point, donc que son diamètre [1] $\delta[f^{-1}(y)]$ soit >0; ou encore, en désignant par δ_f la borne supérieure des nombres $\delta[f^{-1}(y)]$:

$$\delta_f = \max_{y \in B} \delta f^{-1}(y), \quad \text{on a:} \quad \delta_f > 0.$$

Désignons par $\tau(A, B)$ la borne inférieure des nombres δ_f, f étant une fonction continue variable qui transforme A en B:

$$\tau(A, B) = \min_{f(A)=B} \delta_f = \min_{f(A)=B} \max_{f(x_1)=f(x_2)} |x_1 - x_2|.$$

L'étude de ce coefficient, attaché au couple A, B d'ensembles, s'impose d'une façon naturelle, lorsqu'il importe de transformer l'ensemble A en B de manière que les points „très" éloignés ne se transforment jamais en un seul point; $\tau(A, B)$ est bien le plus grand nombre tel qu'il existe nécessairement dans chaque transformation continue f de A en B un couple de points x_1, x_2 tels que $f(x_1)=f(x_2)$ et $|x_1 - x_2| \geqslant \tau(A, B)$.

[1] $\delta(X)=$ borne supérieure des distances entre les éléments de X; c. à d. $= \max\limits_{x_1, x_2} |x_1 - x_2|$, le symbole $|x_1 - x_2|$ désignant la distance de x_1 à x_2.

Il est à remarquer que le nombre $\tau(A, B)$ ainsi défini ne dépend pas des propriétés métriques de B, tandis qu'il dépend bien des propriétés métriques de A. Mais on remarquera facilement que le fait que $\tau(A, B)$ est positif est de nature purement topologique.

On pourrait — peut être — étudier à la place du nombre $\tau(A, B)$ un coefficient qui n'est déterminé que par les propriétés topologiques des ensembles A et B: ce coefficient est le maximum des nombres $\tau(X, B)$ où X parcourt la famille de tous les ensembles homéomorphes à A et tels que $\delta(X)=1$. Il mesure en certain sens la différence topologique entre A et B.

On est conduit à l'étude du coefficient $\tau(A, B)$ dans les problèmes des invariants des „petites" transformations; notamment comme l'a fait observer M. Alexandroff [1]) il y a des propriétés topologiques importantes des espaces compacts A, qui appartiennent non seulement à chaque ensemble homéomorphe à A mais aussi à chaque ensemble B qui — quel que soit $\varepsilon > 0$ — s'obtient de A à l'aide d'une transformation f, telle que $\delta_f < \varepsilon$, en d'autres termes: il s'agit d'une propriété telle que si A la possède, tandis que B ne la possède pas, on a: $\tau(A, B) > 0$.

Ainsi par exemple: 1) le fait que la dimension est $\geqslant n$, 2) le fait (pour les complexes, du moins) que le r-ième nombre de Betti est $\geqslant n$, 3) la non-unicohérence (v. N. 3), 4) l'existence d'une transformation „essentielle" (au sens de M. Hopf) en une surface sphérique [2]) sont des invariants des petites transformations.

Le problème plus précis — et de nature quantitative, dont nous nous occuperons dans quelques cas particuliers — est de calculer le nombre $\tau(A, B)$, au lieu de démontrer simplement que ce nombre est positif.

On n'a que très peu des renseignements jusqu'à présent sur ce nombre. On sait, par exemple que si A coupe l'espace euclidien n-dimensionnel tandis que B ne le coupe pas, on a $\tau(A, B) \geqslant \geqslant \varrho \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$, ϱ désignant le rayon de la plus grande sphère inscrite dans une région bornée, complémentaire à A. Dans le cas particulier où A est une surface sphèrique à $n-1$ dimensions

[1]) V. surtout Ann. of Math 30 (1928) „Gestalt und Lage..." (I Kap. „Kleine Transformationen").

[2]) K. Borsuk u. S. Ulam, Math. Ann. 1933.

de rayon ϱ, on a l'égalité. Mais on ne connait pas de coefficient exact dans les cas général du r-ième nombre de Betti.

D'après un théorème publié dans ce volume [1]), si Q_n désigne la sphère n-dimensionnelle de rayon 1 et S_{n-1} sa surface, on a

$$\tau(Q_n, S_n) = \frac{2n+2-\sqrt{2n^2+2n}}{n+2}.$$

Un exemple entrant dans un ordre d'idées analogue où l'on connait le nombre τ est le suivant: d'après un théorème sur les „antipodes" [2]), si l'on transforme la surface S_n d'une sphère à $n+1$ dimensions en une partie de l'espace euclidien à n-dimensions, il y a toujours deux points „antipodiques" sur la sphère, qui se rencontrent dans cette transformation; cela veut dire qu'on a

$$\tau(S_n, X) = \delta(S_n),$$

quel que soit l'ensemble X situé dans l'espace n-dimensionnel; ou encore, en désignant d'une façon générale par $\tau(A, \mathfrak{B})$ la borne inférieure des nombres $\tau(A, B)$ où l'ensemble B parcourt la classe $\mathfrak{B}$:

$$\tau(S_n, \mathfrak{A}) = \delta(S_n),$$

$\mathfrak{A} =$ famille des ensembles situés dans l'espace n-dimensionnel.

2. *Dimension* [3]).

On appelle n-ième grade de dimension de l'espace compact A, $\sigma_n(A)$ (constante d'Urysohn), la borne inférieure des nombres ε tels que A se laisse décomposer en un système fini d'ensembles ouverts, de diamètres $\leqslant \varepsilon$ de façon qu'aucun point n'appartienne à $n+2$ ensembles de ce système.

D'après un théorème fondamental de la théorie de la dimension, l'égalité $\sigma_n(A) = 0$ équivaut à la formule $\dim A \leqslant n$.

Théorème. A désignant un ensemble compact n-dimensionnel et $\mathfrak{B}$ désignant la famille des espaces compacts de dimensions inférieures, on a

$$\tau(A, \mathfrak{B}) = \sigma_{n-1}(A).$$

[1]) p. 206.

[2]) proposé par M. Ulam et démontré par M. K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, ce vol.

[3]) Cf. Alexandroff, C. R. 183, p. 640.

Démonstration: 1) $\tau(A, \mathfrak{B}) \geqslant \sigma (= \sigma_{n-1}(A))$. Soit, en effet, f une fonction continue, définie sur A et telle que $\delta_f < \sigma$; il s'agit de prouver que $\dim f(A) \geqslant n$. L'espace A étant compact, il existe un nombre η tel que l'inégalité $|f(x)-f(x')| < \eta$ entraîne $|x-x'| < \sigma$. Soit $A = D_1 + \ldots + D_m$ une décomposition de A en ensembles fermés tels que $\delta[f(D_i)] < \eta/3$. Il vient $f(A) = f(D_1) + \ldots + f(D_m)$.

Supposons, par impossible, que $\dim f(A) < n$. Il existe alors un recouvrement de $f(A)$ par un système d'ensembles ouverts: $f(A) = Y_1 + \ldots + Y_m$ tels que 1° aucun point n'appartient à $n+1$ parmi les ensembles Y_i et 2° $Y_i \subset R_{\eta/3}[f(D_i)]$ [1]).

De là résulte que la formule $A = f^{-1}(Y_1) + \ldots + f^{-1}(Y_m)$ présente une décomposition de l'espace A en ensembles ouverts tels que 1°: aucun point n'appartient à $n+1$ parmi les ensembles $f^{-1}(Y_i)$, car

$$f^{-1}(Y_{i_1} \cdot Y_{i_2} \cdot \ldots \cdot Y_{i_{n+1}}) = f^{-1}(Y_{i_1}) \cdot f^{-1}(Y_{i_2}) \cdot \ldots \cdot f^{-1}(Y_{i_{n+1}}),$$

2°: $\delta[f^{-1}(Y_i)] < \sigma_{n-1}(A)$, car si x et x' appartiennent à $f^{-1}(Y_i)$, c. à d. si $f(x)$ et $f(x')$ appartiennent à Y_i, il existe deux points y et y' appartenant à $f(D_i)$ tels que $|f(x)-y| < \eta/3$, $|f(x')-y'| < \eta/3$, $|y-y'| < \eta/3$; d'où $|f(x)-f(x')| < \eta$ et par conséquent $|x-x'| < \sigma$. Une décomposition de ce genre est évidemment incompatible avec la définition de $\sigma_{n-1}(A)$.

2) $\tau(A, \mathfrak{B}) \leqslant \sigma$. Il s'agit de prouver qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond une fonction continue f telle que $\delta_f < \sigma + \varepsilon$ et $\dim f(A) < n$.

Soit, en effet, $A = A_1 + \ldots + A_m$ une décomposition de A telle que 1°: $\delta(A_i) < \sigma + \varepsilon$; 2°: aucun point n'appartient à $n+1$ ensembles A_i.

Cette dernière hypothèse équivaut à celle que la dimension du nerf (au sens de M. Alexandroff) du système $\{A_i\}$ est $< n$. Or, d'après un théorème fondamental concernant les nerfs [2]), on peut transformer A en une partie de ce nerf à l'aide d'une fonction continue f telle que $\delta_f \leqslant \max \delta(A_i) < \sigma + \varepsilon$. Notre théorème se trouve ainsi complètement démontré.

[1]) Le symbole $R_\eta(X)$ désigne l'ensemble des points dont la distance de X est $< \eta$.

[2]) Cf. le „Überführungssatz" de M. P. Alexandroff ainsi que C. Kuratowski ce vol. p. 196.

3. *Unicohérence.*

M étant un continu non-unicohérent [1] et $\mathfrak{B}$ *désignant la famille des continus unicohérents, on a*: $\tau(M, \mathfrak{B}) > 0$. En d'autres termes: il existe une constante positive λ, ne dépendant que de l'ensemble M et telle que si f est une fonction continue, définie sur M et $\delta_f < \lambda$, alors $f(A)$ est un continu non-unicohérent.

Soit, en effet, $M = K + L$, $KL = A + B$, $AB = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ une décomposition de M en deux continus K et L. Soit η un nombre positif suffisamment petit pour que l'on ait $R_\eta(A) \cdot R_\eta(B) = 0$.

En tenant compte de l'égalité $\operatorname{Lim}_{n \to 0} [R_{\frac{1}{n}}(K) \cdot R_{\frac{1}{n}}(L)] = K \cdot L$, désignons par n un entier tel que

$$R_{\frac{1}{n}}(K) \cdot R_{\frac{1}{n}}(L) \subset R_\eta(K \cdot L) = R_\eta(A + B) = R_\eta(A) + R_\eta(B).$$

Nous allons prouver que f étant une fonction continue avec δ_f suffisamment petit $\left(\text{en tout cas } \delta_f < \frac{1}{n}\right)$, le continu $f(M)$ est non-unicohérent.

En effet: $f(M) = f(K) + f(L)$ et δ_f étant suffisamment petit, $f[R_\eta(A)] \cdot f[R_\eta(B)] = 0$. Il s'agit de prouver que l'ensemble $f(K) \cdot f(L)$ n'est pas un continu; il suffira à ce but de démontrer que 1^0: $f(K) \cdot f(L) \subset f[R_\eta(A)] + f[R_\eta(B)]$, 2^0: $f(K) \cdot f(L) \cdot f[R_\eta(A)] \neq 0$. Or, l'inégalité $\delta_f < \frac{1}{n}$ implique $f^{-1} f(L) \subset R_{\frac{1}{n}}(L)$; donc l'identité: $f(K) \cdot f(L) = f[K \cdot f^{-1} f(L)]$ donne $f(K) \cdot f(L) \subset f[K \cdot R_{\frac{1}{n}}(L)] \subset \subset f[R_\eta(A) + R_\eta(B)]$ d'où l'inclusion 1^0. D'autre part, l'inclusion $A \subset K$ implique $f(A) \subset f(K)$ et de même $f(A) \subset f(L)$; donc:

$$0 \neq f(A) \subset f[R_\eta(A)] \cdot f(K) \cdot f(L), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Il résulte du théorème précédent que *le produit dénombrable* [2] $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \ldots \times \ldots$ *(espace des suites infinies) d'une suite des continus unicohérents X_i est un continu unicohérent.*

[1] Par définition, M est non-unicohérent, lorsque M est de la forme:

$$M = K + L, \quad KL = A + B, \quad AB = 0, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0,$$

K et L étant des continus et A et B des ensembles fermés. D'après un théorème de MM. Borsuk et Čech (publié dans ce volume) le fait qu'un continu péanien est unicohérent veut dire que le premier nombre de Betti (au sens de Vietoris) s'annule.

[2] Pour la définition v. p. ex., Fund. Math. XVII, p. 265.

En effet, cet énoncé est vrai — d'après un résultat de M. Borsuk [1]) dans le cas de produit *fini*. Or, un produit infini peut être transformé en un produit fini par une „projection" f ayant le nombre δ_f si petit que l'on veut. La non-unicohérence du produit infini serait donc incompatible avec notre résultat précédent.

4. *Superposition des fonctions.*

Soient A, B et C trois espaces compacts, soient h et g deux transformations continues de A en C et de C en B respectivement. Désignons par $f = gh$ la transformation superposée (de A en B). On voit aussitôt, que $\delta_h \leqslant \delta_f$.

Supposons à présent que *chaque* transformation continue de A en B soit une superposition de deux transformations g et h de ce genre: $f = gh$. Il vient alors:

$$\tau(A, C) \leqslant \tau(A, B).$$

On est dans ces conditions, lorsque A est un continu péanien (= image continue d'un intervalle) unicohérent et B la circonférence du cercle $|z| = 1$ (du plan complexe); car — d'après un théorème de M. Borsuk [2]) — chaque fonction continue $f(x)$ qui transforme A en B est de la forme $f(x) = e^{i\psi(x)}$, où $\psi(x)$ est une fonction continue de x, à valeurs réelles (appelée „rotation").

Par conséquent, *A étant un continu péanien unicohérent, on a*

$$\tau(A, I) \leqslant \tau(A, S_1), \tag{I}$$

où I désigne un intervalle (de l'axe réel) et S_1 la circonférence d'un cercle.

Soit maintenant S_2 la surface de la sphère à 3 dimensions et T_2 la surface du tore. Toute transformation continue $g = f(p)$ de S_2 en T_2 peut être regardée comme superposition d'une transformation de S_2 en un carré C et d'une transformation de C en T_2.

En effet, toute transformation de S_2 en T_2 représente deux transformations f_1 et f_2 de S_2 en S_1 (la surface T_2 du tore étant le produit combinatoire $S_1 \times S_1$). S_2 étant unicohérent, il existe, d'après ce qui précède, deux fonctions $x = h_1(p)$ et $y = h_2(p)$ qui trans-

[1]) K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XVII, p. 204.

[2]) K. Borsuk, l. c. p. 195. On rapprochera ce théorème du théorème classique sur la monodromie des fonctions analytiques.

forment S_2 en l'intervalle (p. ex. en l'intervalle $(0, 1)$) ainsi que deux fonctions $g_1(x)$ et $g_2(y)$ qui transforment I en S_1 et telles que $f_1 = g_1 h_1$, $f_2 = g_2 h_2$; f est donc une superposition des transformations $g = [g_1(x), g_2(y)]$ et $(x, y) = h(p) = [h_1(p), h_2(p)]$; h transforme S_2 en le carré $C = I \times I$, et g transforme C en T_2.

Ceci établi, on en conclut, en vertu du théorème sur les „antipodes", cité dans l'introduction, que *dans chaque transformation continue de la surface sphérique en la surface du tore, il existe deux points antipodiques de la sphère qui se trouvent transformés en un seul point sur le tore*; ou encore, que

$$\tau(S_2, T_2) = \delta(S_2).$$

Tout cela se laisse généraliser à n dimensions, si l'on entend par le tore n-dimensionnel le produit combinatoire de n circonférences du cercle.

5. *Transformations en un arc ou en une courbe simple fermée.*

Soit T un „triode" composé de trois segments de droites A, B et C, chacun d'unité de longueur, chaque couple formant l'angle 120^0 et tous les trois n'ayant qu'un seul point en commun; $I = ab$ désignant un intervalle on a

$$(1) \qquad \tau(T, I) = 1.$$

Soit, en effet, $f(T) = ab$; pour des raisons de symétrie on peut admettre que $a \epsilon f(A)$ et $b \epsilon f(A) + f(B)$. Or, $A + B$ étant un continu, $f(A) + f(B)$ l'est également, est donc identique à l'intervalle ab. Il en résulte que, p désignant l'extrémité „libre" du segment C, on a $f(p) \epsilon f(A) + f(B)$ et comme $\varrho(p, A + B) = 1$, il vient $\delta_f \geqslant 1$, donc $\tau(T, ab) \geqq 1$. Evidemment $\tau(T, ab) = 1$.

Ceci établi, nous allons prouver que *C étant un continu péanien tel que $\tau(C, I) = 0$, C est un arc simple.*

En effet, d'après le théorème du N 3, C, ainsi que chaque sous-continu de C, est unicohérent. Donc C, comme continu péanien qui ne contient aucune courbe simple fermée est une „dendrite". Si cette dendrite n'était pas un arc simple, elle contiendrait nécessairement un triode T (plus précisément: une courbe homéomorphe à un triode) mais ceci serait incompatible avec la formule (1).

Nous allons démontrer, à présent, que *C étant un continu péanien tel que $\tau(C, S_1) = 0$ (où S_1 est une circonférence du cercle), C est une courbe simple fermée.*

En outre:

$$\tau(T, S_1) = 1.$$

En vertu de la formule (I) du N 4, C ne peut pas être unicohérent, C contient donc une courbe simple fermée K. Le nombre δ_f de la transformation f de C en S_1 étant suffisamment petit, on a $f(K) = S_1$, car dans le cas contraire $f(K)$ serait un arc simple contrairement au théor. du N 3.

L'égalité $f(K) = S_1$ entraîne $K = C$, car autrement il existerait un point p appartenant à $C - K$ et la condition $f(p) \epsilon f(K)$ impliquerait $\delta_f > \varrho(p, K)$.

Donc C, comme identique à K, est une courbe simple fermée.

Remarque. Le théorème serait en défaut, si l'on omettait l'hypothèse que le continu C est péanien. Notamment, si $C =$ le continu indécomposable B_0 [1]) on a $\tau(B_0, S_1) = 0$. En effet, le continu B_0 est la partie commune d'une suite infinie de bandes, chacune contenue dans la précédente, les bandes étant de plus en plus étroites et les deux „extrémités" d'une même bande étant de plus en plus rapprochées. Ainsi à chaque $\varepsilon > 0$ correspond une bande qui se laisse ε-transformer en une courbe simple fermée, de sorte que le continu B_0 se trouve ε-transformé en cette courbe.

6. *Transformations de l'intervalle.*

C étant un espace péanien qui contient une sphère n-dimensionnelle ouverte K_n, $n \geqslant 2$ (ou un ensemble homéomorphe à K_n), qui constitue dans C un ensemble ouvert, on a

$$\tau(I, C) = 0$$

(I désignant un intervalle).

Divisons, en effet, l'intervalle I en un nombre fini d'intervalles $A_1, \ldots, A_k$ de longueur $< \varepsilon$. Soit $L_1, \ldots, L_k = K_n$ un système des sphères (ouvertes) concentriques. Soient: f_1 une transformation continue de A_1 en $\overline{L_1}$, f_2 de A_2 en $\overline{L_2 - L_1}$, f_3 de A_3 en $\overline{L_3 - L_2}$ et, ainsi de suite, f_k de A_k en $\overline{C - L_{k-1}}$. On peut évidemment s'arranger de façon que x_i étant l'extrémité commune des intervalles A_i et A_{i+1}, on ait $f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i)$. On parvient ainsi à une transformation de l'intervalle I tout entier en l'espace C telle que $\delta_f < 2\varepsilon$.

[1]) Pour la définition de B_0 v. par ex., Fund. Math, III, p. 209, V, p. 40 ou XIX, p. 254.

Ainsi, en particulier, si C est une *multiplicité polyédrale* (telle que p. ex. la surface sphérique, la surface du tore etc.),

$$\tau(I, C) = 0.$$

7. *Quasi-homéomorphie.*

Nous appelons deux espaces compacts A et B *quasi-homéomorphes* lorsque $\tau(A, B) = \tau(B, A) = 0$.

La quasi-homéomorphie est une relation *transitive*. Plus précisément, si $\tau(A, B) = 0 = \tau(B, C)$, on a $\tau(A, C) = 0$.

Soit, en effet, f une transformation de A en B avec $\delta_f < \varepsilon$. Il existe un $\eta > 0$ tel que les conditions $Y \subset B$ et $\delta(Y) < \eta$ impliquent $\delta[f^{-1}(Y)] < \varepsilon$. Soit g une transformation de B en C avec $\delta_g < \eta$. Posons $h = gf$; il vient $h(A) = C$ et $\delta_h < \varepsilon$. Donc $\tau(A, C) = 0$.

La quasi-homéomorphie détermine donc une décomposition de la classe de tous les ensembles (compacts) en sous-classes disjointes. Deux ensembles quasi-homéomorphes possèdent toujours la même dimension, les mêmes groupes et nombres de Betti (lorsqu'il s'agit de complexes), ils ne peuvent être unicohérents que tous les deux. Mais ils ne sont pas nécessairement homéomorphes, (c. à d. que la classification en types topologiques est poussée plus loin que celle en ensembles quasi-homéomorphes), par exemple un cercle et deux cercles tangents (intérieur y compris) sont quasi-homéomorphes, sans être homéomorphes.

Il serait d'ailleurs intéressant de savoir si deux multiplicités (au sens combinatoire — donc espaces localement euclidiens) peuvent présenter la singularité en question.

Si A et C, B et D sont deux paires d'ensembles quasi-homéomorphes, les produits combinatoires $(A \times B)$ et $(C \times D)$ le sont aussi. Plus précisément on a la formule facile à vérifier:

$$\tau(A \times B, C \times D) \leqslant \sqrt{\tau(A, C)^2 + \tau(B, D)^2}.$$

Le problème suivant s'impose: l'existence d'une transformation continue sans point invariant est-elle invariante relativement à la quasi-homéomorphie?

Observons que cette propriété n'est pas invariante envers les „petites transformations". Nous allons notamment construire une courbe qui se laisse transformer d'une manière continue en une partie de soi-même sans point invariant, tandis que pour chaque $\epsilon > 0$, on peut la ϵ-transformer en un ensemble, qui possède un point invariant dans toute transformation continue en une partie de soi-même.

Soit C la courbe composée: 1° de la fermeture de la courbe $y = 1 + x \sin\left[\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{x}}\right]$, $0 < x \leqslant \frac{2}{3}$, 2° de la courbe précédente où l'on remplace 1 par -1 et x par $x - \frac{2}{3}$, 3° des deux segments verticaux: $-1 \leqslant y \leqslant +1$, $x = 0$ et $-1 \leqslant y \leqslant +1$, $x = \frac{2}{3}$.

La courbe C admet une transformation continue sans point invariant: notamment par symétrie radiale, effectuée du point $x = \frac{1}{3}$, $y = 0$.

Cependant, pour n fixe (impair), en remplaçant les y de la courbe supérieure, qui correspondent à $x < \dfrac{2}{n}$ par $y = 1$, on effectue sur C une transformation continue f avec $\delta_f < \dfrac{4}{n}$ et la courbe C ainsi transformée admet dans chaque transformation un point invariant; notamment en cas où l'on transforme $f(C)$ en $f(C)$ tout entier, le point $(+\frac{2}{3}, -1)$ est invariant; et dans le cas contraire, on n'aura qu'à tenir compte du fait qu'un continu qui ne coupe pas le plan admet un point invariant dans chaque transformation continue.