Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie.

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Herr H. Hopf hat in seiner Abhandlung „Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche“ [1]) neben vielen anderen Ergebnissen folgenden Satz für *Komplexe* A bewiesen:

(H) *A lässt sich dann und nur dann wesentlich* [2]) *auf eine Kreislinie abbilden, wenn seine erste Bettische Zahl positiv ist.*

Der Zweck dieser Arbeit ist, diesen Satz auch für den Fall zu beweisen, dass A ein beliebiger metrischer kompakter Raum ist, wobei aus Ausgangspunkt die Vietorissche [3]) Definition der Bettischen Zahlen angenommen ist [4]), und einige einfache Folgerungen aus dem so verallgemeinerten Satze anzugeben.

1. E sei eine Teilmenge des Grundquaders Q_ω des Hilbertschen Raumes. Unter einem Simplex in E verstehen wir ein *orientiertes Simplex* [5]), dessen Eckpunkte die Eckpunkte eines geometrischen [6]) in E enthaltenen Simplexes sind. Unter einem *Komplex in E* — einen algebraischen [5]) Komplex mit Simplexen in E und rationalen Koeffizienten. Ein Komplex in E mit verschwindendem Rande heisst ein *Zyklus in E*. Zwei Zyklen Z und Z' werden in E *homolog* genannt (Bezeichnung: $Z_1 \sim Z_2$ in E), falls $Z_1 - Z_2$ der Rand eines Komplexes in E ist.

2. Die von L. Vietoris [3]) angegebene Definition der Bettischen Zahlen für einen beliebigen metrischen kompakten Raum A, lässt sich, wenn es sich nur um Definition der Positivität der ersten Bettischen Zahl handelt, folgendermassen formulieren:

Die erste Bettische Zahl einer abgeschlossenen Menge $A \subset Q_\omega$ ist dann und nur dann positiv, wenn es eine Folge $\{U_n\}$ von abgeschlossenen Umgebungen [7]) *von A und eine Folge von Zyklen $\{Z_n\}$ derart gibt, dass die Bedingungen*

$$(1)\qquad U_{n+1} \subset U_n; \quad \prod_{n=1}^{\infty} U_n = A,$$

$$(2)\qquad Z_n \textit{ ist ein eindimensionaler Zyklus in } U_n,$$

$$(3)\qquad Z_{n+1} \sim Z_n \textit{ in } U_n, \quad \textit{für } n = 1, 2, \ldots,$$

$$(4)\qquad Z_1 \textit{ non} \sim 0 \quad \textit{in} \quad U_1$$

erfüllt sind.

3. Man sieht leicht: wenn die Folgen $\{U_n\}$ und $\{Z_n\}$ die obigen Eigenschaften aufweisen und die Folge $\{U'_n\}$ von abgeschlossenen Umgebungen von A die erste dieser Eigenschaften hat und $U'_n \subset U_1$ ist, so kann man aus der Folge $\{Z_n\}$ eine solche Teilfolge $\{Z'_n\}$ her-

[1]) Math. Ann. 104 (1931), S. 641 Satz V^a, und S. 664.

[2]) Die Abbildung f von A auf den Raum Q heisst wesentlich, wenn für jede stetige Funktionenschar $\{f_t\}$, wobei für $0 \leqslant t \leqslant 1$, f_t die Menge A stetig auf Q abbildet und $f_0 = f$ ist, Q vollständig durch die Bildmenge $f_1(A)$ bedeckt wird. Siehe H. Hopf, l. c., S. 637.

[3]) L. Vietoris, Math. Ann. 97 (1927) S. 458 ff. Vgl. auch S. Lefschetz, Ann. of Math. 29 (1928), S. 247 ff. und S. Lefschetz, Topology (New York, 1930), S. 330 ff.

[4]) Nach Vollendung dieser Arbeit habe ich durch Herrn H. Hopf erfahren, dass der analoge Satz vor kurzem unabhängig als Nebenresultat von Herrn N. Bruschlinsky bewiesen worden ist. Die ähnliche Ergebnisse befinden sich auch in der im Zusatz [14a]) zitierten Arbeit von Herrn E. Čech.

[5]) Die Benennungen „orientiertes Simplex“, „algebraischer Komplex“, „Rand eines algebraischen Komplexes“, „Homologie“ u. s. w. werden hier in dem, in dem Buche von P. Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie (Berlin, 1932) festgelegten Sinne gebraucht.

[6]) Das geometrische Simplex mit den Eckpunkten $p_0, p_1, \ldots, p_n \in Q_\omega$ ist die kleinste konvexe Teilmenge von Q_ω, die alle Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_n$ enthält.

[7]) Die Menge U wird eine *Umgebung* der Teilmenge E eines metrischen Raumes M genannt, wenn E im Innern von U enthalten ist, d. h. wenn die abgeschlossene Hülle von $M - U$ mit E punktfremd ist.

ausnehmen, dass die Folgen $\{U'_n\}$ und $\{Z'_n\}$ wieder alle obigen Eigenschaften aufweisen.

4. Es sei nun A ein beliebiger metrischer kompakter Raum. Nach dem bekannten Einbettungssatze von P. Urysohn[8]) kann man $A \subset Q_\omega$ annehmen. Wir setzen nun:

(5) $r_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ für jedes $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \in Q_\omega$.

Es sei Σ_n eine simpliziale Zerlegung des Polyeders $Q_n = r_n(Q_\omega)$, deren sämtliche Simplexe Durchmesser $\leqslant \varepsilon_n$ haben, wobei $\{\varepsilon_n\}$ eine zunächst beliebig vorausgesetzte Folge von positiven Zahlen ist. C_n bezeichne die Summe aller mit $r_n(A)$ nicht punktfremden Simplexe von Σ_n. Die Mengen $V_n = r_n^{-1}(C_n)$ (d. h. $V_n = \underset{x \in Q_\omega}{E}[r_n(x) \in C_n]$) bilden dann eine Folge von abgeschlossenen Umgebungen von A. Es ist ersichtlich: durch die Voraussetzung, dass die Folge $\{\varepsilon_n\}$ hinreichend schnell nach Null strebt, kann man erreichen, dass die Umgebungen $\{V_n\}$ folgende Eigenschaften aufweisen:

$$V_{n+1} \subset V_n; \qquad \prod_{n=1}^{\infty} V_n = A. \tag{6}$$

5. Setzen wir nun voraus, dass die erste Bettische Zahl von A positiv ist und dass die Folgen $\{U_n\}$ und $\{Z_n\}$ die Eigenschaften (1)—(4) aufweisen. Nach (6) gibt es einen Index k_0 derart, dass $V_{k_0} \subset U_1$ ist. Man kann also nach 3. annehmen, dass die die Bedingungen (1)—(4) genügende Folge $\{U_n\}$ durch die Formel $U_n = V_{k_0-1+n}$, das heisst durch die Formel

$$U_n = r_{k_0-1+n}^{-1}(C_{k_0-1+n}) \tag{7}$$

definiert ist.

Die so definierten Umgebungen U_n haben die ersichtliche Eigenschaft, dass jeder Zyklus Z in U_n seiner Projektion auf C_{k_0-1+n}, d. h. dem Zyklus $r_{k_0-1+n}(Z)$ homolog (sogar homotop) im U_n ist. Insbesondere folgt aus (4)

$$r_{k_0}(Z_1) \sim Z_1 \text{ non} \sim 0 \text{ in } U_1 \tag{8}$$

[8]) Siehe z. B. K. Menger, *Dimensionstheorie* (Leipzig, 1928), S. 57.

und somit auch, da $C_{k_0} \subset V_{k_0} = U_1$ ist:

$$r_{k_0}(Z_1) \text{ non} \sim 0 \text{ in } C_{k_0}. \tag{9}$$

Insbesondere ist somit die erste Bettische Zahl des Polyeders C_{k_0} positiv.

Aus (9) und aus dem Satze (H) für Komplexe folgt[9]) die Existenz einer stetigen Abbildung f des Polyeders C_{k_0} auf S_1, für welche

$$f\,r_{k_0}(Z_1) \text{ non} \sim 0 \text{ in } S_1 \tag{10}$$

gilt.

Die Funktion f lässt sich stetig auf die ganze Menge U_1 erweitern, indem man für jedes $x \in U_1$, $f(x) = f\,r_{k_0}(x)$ setzt. Wir zeigen, dass die so definierte Funktion f die Menge $A \subset U_1$ wesentlich auf S_1 abbildet.

Betrachten wir das Produkt der Menge U mit der Strecke $\langle 0, 1 \rangle$, d. h. den Raum $U_1 \times \langle 0, 1 \rangle$, der als Elemente alle geordneten Paare (x, t) mit $x \in U_1$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$ hat und der durch die Formel $\varrho[(x_1, t_1), (x_2, t_2)] = \sqrt{\varrho(x_1, x_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}$ metrisiert ist. Die Menge U_1 wird als mit $U_1 \times (0)$ identisch betrachtet und zwar jeder Punkt $x \in U_1$ mit dem Punkte $(x, 0) \in U_1 \times \langle 0, 1 \rangle$ identifiziert. Insbesondere ist dann $A \subset U_1 \times (0)$.

Nehmen wir nun an, dem Behaupteten zuwider, dass f die Menge A unwesentlich auf S_1 abbildet. Diese Annahme bedeutet, dass f sich stetig auf die Menge $U_1 + A \times \langle 0, 1 \rangle$ erweitern lässt, und zwar derart, dass die Menge $A \times (1)$ auf einen einzigen Punkt von S_1 abgebildet wird.

$U_1 + A \times \langle 0, 1 \rangle$ ist aber eine abgeschlossene Teilmenge des Raumes $U_1 \times \langle 0, 1 \rangle$, und somit lässt sich[10]) *jede* Funktion, welche diese Menge stetig auf S_1 abbildet, zu einer stetigen Abbildung einer gewissen Umgebung W der Menge auf S_1 erweitern. Nehmen wir diese Erweiterung vor, so haben wir:

(11) W ist eine Umgebung von $U_1 + A \times \langle 0, 1 \rangle$ im Raume $U_1 \times \langle 0, 1 \rangle$,

(12) f bildet W stetig auf S_1 ab,

(13) $f((x, 1)) = \text{const.}$ für jedes $x \in A$.

[9]) H. Hopf, l. c., S. 663—4, Zusatz.

[10]) K. Borsuk, Math. Ann. 106 (1932), S. 241.

Aus (11), (13) und (1) folgt, dass für ein hinreichend grosses n_0

$$U_{n_0}\times\langle 0,\,1\rangle\subset W \quad \text{und}$$

$$f(U_{n_0}\times(1))\subsetneqq S_1$$

gilt; hieraus und aus (12) ergibt sich, dass U_{n_0} auf S_1 unwesentlich durch f abgebildet ist. Nach (2) ist auch der Zyklus Z_{n_0} unwesentlich auf S_1 abgebildet, so dass

$$f(Z_{n_0})\approx 0 \text{ in } S_1 \tag{14}$$

ist. Da aber, nach (1), (3) und (8)

$$Z_{n_0}\approx Z_1\approx r_{k_0}(Z_1) \text{ in } U_1$$

gilt, so hat man nach (10) $f(Z_{n_0})\approx f(Z_1)\approx f r_{k_0}(Z_1)$ *non* ≈ 0 in S_1, was der Homologie (14) widerspricht.

Die Annahme, dass f die Menge A in S_1 unwesentlich abbildet, hat uns somit zum Widerspruch geführt.

6. Eine Teilmenge P eines Raumes R wird *Deformationsretrakt von* R genannt, wenn es eine stetige Funktion $\varphi(x,t)$ derart gibt, dass

1° $\varphi(x,t)\in R$ für jedes $x\in R$ und $0\leqslant t\leqslant 1$,

2° $\varphi(x,0)=x$, $\varphi(x,1)\in P$ für jedes $x\in R$,

3° $\varphi(x,1)=x$ für jedes $x\in P$

ist. Insbesondere ist der ganze Raum R einer seiner Deformationsretrakte.

7. Hilfssatz. *Eine Abbildung f eines kompakten Raumes R auf Q ist wesentlich (bzw. unwesentlich), wenn f jeden Deformationsretrakt P von R wesentlich (bzw. unwesentlich) auf Q abbildet.*

Beweis. Da eine unwesentliche Abbildung von R auf Q auch jede Teilmenge P von R unwesentlich auf Q abbildet, bleibt nur zu zeigen, dass, wenn f einen Deformationsretrakt P von R unwesentlich auf Q abbildet, f auch den ganzen Raum R auf Q unwesentlich abbildet. Es sei $\{f'_t\}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, eine stetige Schar von stetigen Abbildungen von P auf Q derart, dass $f'_0(x)=f(x)$ für jedes $x\in P$ und $f'_1(P)\subsetneqq Q$ ist. Wir setzen

$$f_t(x)=f\varphi(x,2t) \quad \text{für} \quad 0\leqslant t\leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad x\in R,$$
$$f_t(x)=f'_{2(t-\frac{1}{2})}\,\varphi(x,1) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \quad \text{und} \quad x\in R.$$

Die Funktionen f_t bilden dann eine stetige Schar von Abbildungen von R auf Q, wobei $f_0=f$ und $f_1(R)=f'_1\varphi(R,1)=$ $=f'_1(P)\subsetneqq Q$ ist.

Hiermit ist unserer Hilfssatz bewiesen.

8. Korollar. *Entweder lassen sich alle Deformationsretrakte eines kompakten Raumes, oder keiner von ihnen, lässt sich wesentlich auf den Raum Q abbilden.*

Nach dem vorigen Hilfssatze bleibt nur zu zeigen, dass eine wesentliche Abbildung f eines Deformationsretraktes P von R sich stetig zu einer Abbildung von R auf Q erweitern lässt. Zu diesem Zwecke braucht man nur $f(x)=f\varphi(x,1)$ für jedes $x\in R$ zu setzen.

9. Es sei nun f eine stetige Abbildung auf S_1 eines metrischen kompakten Raumes A mit verschwindender ersten Bettischen Zahl. Man kann voraussetzen [10]), dass f nicht nur A, sondern auch eine Umgebung $U\subset Q_\omega$ von A auf S_1 stetig abbildet. Nach (6) ist dann $V_{n_0}\subset U$ für einen hinreichend grossen Index n_0. Jeder Zyklus Z in V_{n_0} ist dann in V_{n_0} mit seiner Projektion $r_{n_0}(Z)\subset C_{n_0}$ homolog. Da C_{n_0} ein Komplex ist, gibt es somit in V_{n_0} nur endlich viele linear unabhängige Zyklen (im Sinne der Homologie in V_{n_0}). Da nun die erste Bettische Zahl von A Null ist, ergibt sich daraus, dass für hinreichend grossen Index $k_0>n_0$ jeder eindimensionale Zyklus Z in V_{k_0} homolog Null in V_{n_0} ist. Daraus folgt, dass für jeden eindimensionalen Zyklus Z in C_{k_0}, $f(Z)\approx 0$ in S_1 ist, woraus folgt [11]), dass f den Komplex C_{k_0} unwesentlich auf S_1 abbildet. Da aber C_{k_0} offenbar ein Deformationsretrakt von V_{k_0} ist, so bildet, nach 7., f die Menge V_{k_0} und somit auch $A\subset V_{k_0}$ unwesentlich auf S_1 ab. Hiermit ist der Beweis des Satzes (H) für beliebige metrische, kompakte Räume vollendet.

10. Bezeichnen wir mit S_1^A den Raum, der als Elemente alle stetigen Abbildungen von A in die Kreislinie S_1 hat und der durch die Formel $\varrho(f_1,f_2)=\operatorname*{Sup}_{x\in A}\varrho(f_1(x),f_2(x))$ metrisiert ist. Die Existenz einer wesentlichen Abbildung von A auf S_1 ist dem Nicht-Zusam-

[11]) H. Hopf, l. c., S. 640, Satz V und S. 660 (Beweis).

menhange des Raumes S_1^A gleichbedeutend [12]). Der Satz (H) lässt sich somit auch folgendermassen aussprechen:

(H′) *Das Verschwinden der ersten Bettischen Zahl eines metrischen kompakten Raumes A ist dem Zusammenhange des Raumes S_1^A äquivalent.*

11. Korollar 1. *Für stetige Streckenbilder sind folgende vier Eigenschaften gleichbedeutend:*

1. *Das Verschwinden der ersten Bettischen Zahl,*
2. *Die Nichtexistenz der wesentlichen Abbildung auf die Kreislinie,*
3. *Der Zusammenhang des Raumes der stetigen Abbildungen auf die Kreislinie,*
4. *Die Unikohärenz* [13]).

Die Äquivalenz der drei ersten Eigenschaften ist in den Sätzen (H) und (H′) enthalten; die Äquivalenz der Eigenschaften 3. und 4. ist an anderer Stelle [14]) von mir bewiesen worden [14a]):

12. Korollar 2 [15]). *Die erste Bettische Zahl eines stetigen Streckenbildes verschwindet dann und nur dann, wenn sie für jedes zyklische Element* [16]) *dieses Streckenbildes verschwindet.*

Das ergibt sich aus dem Korollare 1 und aus dem Satze [17]), dass für ein Streckenbild A der Raum S_1^A dann und nur dann zusammenhängend ist, wenn für jedes zyklischen Element E von A der Raum S_1^E zusammenhängend ist.

13. Korollar 3. *Ein Streckenbild mit positiver ersten Bettischen Zahl lässt sich fixpunktfrei stetig auf eine seiner Teilmengen abbilden.*

Dies ergibt sich aus dem Korollare 1 auf Grund des Satzes [18]), dass ein nicht unikohärentes Streckenbild eine stetige fixpunktfreie Abbildung auf eine Teilmenge gestattet.

[12]) K. Borsuk u. S. Ulam, Über gewisse Invarianten der ε-Abbildungen, Math. Ann. in Vorbereitung.

[13]) Ein zusammenhängender Raum M heisst *unikohärent* (*henkellos* im Sinne von L. Vietoris, Proc. Amsterdam 29 (1926), S. 445), wenn der Durchschnitt je zweier zusammenhängender in M abgeschlossener Mengen, deren Summe M ist, zusammenhängend ist. Durch ganz einfache Beispiele kann man zeigen, dass für beliebige Kontinua diese Äquivalenz nicht richtig ist. Vgl. Fund. Math. 17 (1931), S. 195, **36**.

[14]) Fund. Math. 17 (1931), S. 195, **38**.

[14a]) Gleichzeitig (und vor mir unabhängig) hat Herr E. Čech einen ganz anderen Beweis der Äquivalenz der Eigenschaften 1. und 4. angegeben. Siehe E. Čech, *Sur les continus Péaniens unicohérents*, dieser Band. Satz B.

[15]) Dieses Korollar bildet eine partielle Lösung eines von C. Kuratowski u. G. T. Whyburn gestellten Problems: Fund. Math. 16 (1930), S. 328.

[16]) „cyclic element" von G. T. Whyburn (s. Proc. Ntl. Acad. Sc. 13, Seite 31—38), d. h. entweder ein Schnittpunkt des Streckenbildes, oder eine Menge, die mit irgend einem ihrer Punkte x zugleich alle und nur solche Punkte enthält, zwischen welchen und dem Punkte x kein Punkt das Streckenbild zerschneidet.

[17]) Siehe meine Note, Fund. Math. 17 (1932), S. 206, **7**.

[18]) C. Kuratowski, Fund. Math. 14 (1929), S. 307. Vgl. auch K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), S. 188, **32**.