d'ensembles de la classe N, telle que l'ensemble $D = Z - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ est au plus dénombrable.

Soit n un nombre naturel donné. L'ensemble Z_n appartenant à la classe N, il existe (d'après la définition de cette classe) un ensemble E_n de la famille F qui a avec Z_n un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. Posons $E = E_1 E_2 E_3 \ldots$: d'après la propriété de la famille F, E appartient à F et, d'après $E \subset E_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$), les ensembles $E Z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont tous au plus dénombrables. Or, d'après $D = Z - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$, on a $EZ = ED + \sum_{n=1}^{\infty} EZ_n$: l'ensemble EZ est donc au plus dénombrable, contrairement à la propriété de l'ensemble Z.

L'hypothèse que notre proposition n'est pas vraie implique donc une contradiction.

Über gewisse Zerlegungen von Mengen [1]).

Von

Stanisław Ulam (Lwów).

In einer früheren Arbeit [2]) habe ich den folgenden Satz bewiesen [3]).

Es sei Z eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_1$. Werden alle Teilmengen dieser Menge in zwei Klassen, M und N so eingeteilt, dass es in M nur höchstens abzählbar viele elementfremde Mengen gibt, so existieren in N abzählbar viele Mengen $\{A_n\}$, für welche die Menge $(Z - \sum_{n=1}^{\infty} A_n)$ höchstens abzählbar ist.

Als eine Folgerung aus diesem Satze ergab sich die Unmöglichkeit, ein abzählbar additives Maß [4]) für alle Teilmengen einer Menge zu definieren, deren Mächtigkeit kleiner ist, als die erste „unerreichbare" Kardinalzahl.

Nun hat unlängst Herr W. Sierpiński gezeigt [5]), *dass in dem am Anfang genannten Satze die Annahme, dass Z von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ist, durch eine schwächere ersetzt werden kann, nämlich, dass die Mächtigkeit von Z kleiner ist als die erste unerreichbare Kardinalzahl.*

[1]) Die Sätze dieser Note wurden (bei der Voraussetzung dass die Mächtigkeit von $Z \aleph_1$ ist) am 7. III. 1931 an einer Sitzung der Poln. Math. Gesellschaft, Abteilung Lwów, dargestellt.

[2]) „Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre" Fund. Math. XVI (1930). S. 140—150.

[3]) l. c., S. 145, Satz „B".

[4]) l. c., S. 140.

[5]) W. Sierpiński: „Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles, dieser Band.

Ich will jetzt noch einige Folgerungen aus diesem verschärften Satze angeben, auf deren Bedeutung mich Herr W. Sierpiński aufmerksam machte.

Wir machen zunächst die Annahme, daß die Menge Z von einer kleineren Mächtigkeit ist als die erste unerreichbare Kardinalzahl. Es gelten:

Satz I. *Es sei Z (in einem beliebigen perfekten Raume gelegene) Menge von der II-ten Baireschen Kategorie* [1]*). Es gibt dann unabzählbar viele in Z enthaltene, elementfremde Menge, die alle auch von der II-en Baire'schen Kategorie sind.*

Zum Beweise teilen wir alle Untermengen von Z in zwei Klassen ein: M sei die Klasse aller solchen Untermengen, die von der II-ten Baire'schen Kategorie sind, N die Klasse aller anderen.

Wäre unser Satz nicht richtig, so würde diese Einteilung die Voraussetzung des am Anfang genannten Satzes erfüllen. Es würden sich also in N abzählbar viele Mengen finden, die definitionsgemäß von der ersten Baire'schen Kategorie sind, und die mit eventueller Zunahme einer abzählbaren Menge, zusammen Z, also eine Menge von der II-en Kategorie ergeben. Das ist aber nicht möglich: die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Mengen von der I-en Kategorie ergibt wieder eine solche; eine abzählbare Menge ist immer von der ersten Kategorie.

Satz II. *Es sei Z eine Menge, die die Baire'sche Bedingung* [2]*) nicht erfüllt. Es gibt dann unabzählbar viele elementfremde Teilmengen von Z von deren keine die Bairesche Bedingung erfüllt.*

Hier sei die Einteilung der Telmengen von Z in zwei Klassen die folgende: M sei die Klasse aller Teilmengen von Z, die die Baire'sche Bedingung nicht erfüllen, N die Klasse aller anderen.

Wäre unser Satz nicht richtig, so würden wir genau wie bei Satz I schließen, das es abzählbar viele Teilmengen von Z gibt, die die Baire'sche Bedingung erfüllen, und die zusammen mit einer höchstens abzählbaren Mengen die Menge Z, die die Baire'sche Bedingung nicht erfüllt, ergeben. Dies ist aber nicht möglich: eine abzählbare Menge erfüllt die Baire'sche Bedingung immer, so auch die Vereinigungsmenge einer abzählbaren Folge von Mengen, die diese Bedingung erfüllen.

[1]) D. h. Z läßt sich *nicht* als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen, in Bezug auf den ganzen Raum nirgendsdichten Mengen darstellen.

[2]) D. h. Z läßt sich darstellen als Vereinigungsmenge von einer G_δ-Menge und einer Menge erster Kategorie von Baire.

Satz III. *Es sei Z eine Menge von positivem äußerem (Lebesgueschem) Masse. Es gibt unabzählbar viele elementfremde Teilmengen von Z, die alle auch ein positives äußeres Maß haben.*

Wäre der Satz nicht richtig, so würden wir, wie bei Satz I und II, schließen dass es abzählbar viele Mengen vom äußeren Masse 0 gibt, die zusammen Z, also eine Menge von positivem äußerem Masse ergeben, was unmöglich ist.

Bemerkung I. Wenn wir uns im Satze I auf solche Mengen Z beschränken, die in einem separablen Raume (z. B. auf der Geraden) liegen, so ergibt sich die Möglichkeit einer Zerlegung von Z in unabzählbar viele elementfremde Mengen die in *jedem Punkte* einer Umgebung (z. B. eines Intervalles) von der II-ten Baireschen Kategorie sind.

Bemerkung II. Von den unabzählbar vielen Mengen, von denen im Satze III die Rede ist, müssen „fast alle", d. h. alle mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen *unmessbar* sein. Dies mag, wenn man beachtet, dass alle diese Mengen elementfremd sind, als paradox erscheinen.

Bemerkung III. Alle unsere Sätze behalten natürlich ihre Gültigkeit, wenn man von der Menge Z die Annahme macht, dass sie von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, und dabei die Cantorsche Kontinuumshypothese, oder die schwächere Hypothese, dass das Kontinuum eine kleinere Mächtigkeit hat, als die erste unerreichbare Kardinalzahl, als richtig voraussetzt.