Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Appelons *proposition* U la proposition suivante (concernant un ensemble infinie Z formé d'éléments quelconques):

Proposition U: *Si l'on divise tous les sous-ensembles de l'ensemble Z en deux classes M et N de sorte que toute famille d'ensembles disjoints de la classe M est au plus dénombrable, il existe une suite infinie $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ d'ensembles de la classe N, telle que l'ensembles $Z - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ est au plus dénombrable.*

La proposition U est évidemment vraie pour les ensembles Z dénombrables. M. S. Ulam a démontré qu'elle est vraie pour les ensembles Z de puissance $\aleph_1$ [1]).

Le but de cette Note est de démontrer que *la proposition U est vraie pour tout ensemble Z de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ s'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant \mathfrak{m}$* [2]).

Lemme I. (de M. Ulam) [3]). *T étant un ensemble de puissance $\aleph_{\alpha+1}$* (où α est un nombre ordinal donné $\geqslant 0$), *il existe un système d'ensembles $A_\eta^\xi \subset T$, où $\xi < \omega_\alpha$, $\eta < \omega_{\alpha+1}$, tel que: 1°: $A_\eta^\xi A_\zeta^\xi = 0$ pour $\xi < \omega_\alpha$, $\eta < \zeta < \omega_{\alpha+1}$; 2°: $A_\eta^\xi A_\eta^\zeta = 0$ pour $\xi < \zeta < \omega_\alpha$,*

1) *Fund. Math.*, t. **XVI**, p. 145.

2) Un aleph $\aleph_\alpha$ est dit *inaccessible* s'il est régulier (c'est-à-dire s'il n'est pas somme de moins que $\aleph_\alpha$ nombres cardinaux, dont chacun est $< \aleph_\alpha$) et si son indice α est un uombre ordinal de 2me espèce.

3) *Fund. Math.*, t. **XVI**, p. 142—143.

$\eta < \omega_{\alpha+1}$, et 3°: l'ensemble $T - \sum_{\xi<\omega_\alpha} A_\eta^\xi$ est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ pour $\eta < \omega_{\alpha+1}$.

Démonstration. L'ensemble T étant de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, nous pouvons regarder ses éléments comme termes d'une suite transfinie p_λ, où $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$.

Soit λ un nombre ordinal, tel que $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \lambda$ est de puissance $\aleph_\alpha$ et nous pouvons les supposer rangés en une suite transfinie du type ω_α, soit $\{\varphi_\xi^\lambda\}$ $(\xi < \omega_\alpha)$.

Désignons (pour $\xi < \omega_\alpha$, $\eta < \omega_{\alpha+1}$) par A_η^ξ l'ensemble de tous les éléments p_λ, où $\varphi_\xi^\lambda = \eta$. Il en résulte que si $p_\lambda \in A_\eta^\xi A_\zeta^\xi$, on a $\varphi_\xi^\lambda = \eta$ et $\varphi_\xi^\lambda = \zeta$, donc $\eta = \zeta$. Or, si $p_\lambda \in A_\eta^\xi A_\eta^\zeta$, on a $\varphi_\xi^\lambda = \eta$ et $\varphi_\zeta^\lambda = \eta$, donc $\varphi_\xi^\lambda = \varphi_\zeta^\lambda$, ce qui donne (vu la défintion de la suite φ_ξ^λ) $\xi = \zeta$. Le système d'ensembles $\{A_\eta^\xi\}$ jouit donc des propriétés 1° et 2°.

Soit maintenant η un nombre ordinal donné $< \omega_{\alpha+1}$ et posons $R_\eta = T - \sum_{\xi<\omega_\alpha} A_\eta^\xi$. Soit λ un nombre ordinal, tel que $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$ et $\lambda > \eta$. D'après la définition de la suite $\{\varphi_\xi^\lambda\}$ $(\xi < \omega_\alpha)$ il existe un nombre ordinal $\xi < \omega_\alpha$, tel que $\varphi_\xi^\lambda = \eta$, d'où, d'après la définition de l'ensemble A_η^ξ: $p_\lambda \in A_\eta^\xi$. On a donc $p_\lambda \in \sum_{\xi<\omega_\alpha} A_\eta^\xi$ pour les indices λ qui satisfont aux inégalités $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$ et $\lambda < \eta$, d'où résulte que la puissance de R_η est $\leqslant \eta \leqslant \aleph_\alpha$ (puisque $\eta < \omega_{\alpha+1}$).

Le lemme I est ainsi démontré.

Lemme II. *Si la proposition U est vraie pour tout ensemble Z de puissance $\aleph_\alpha$* (où α est un nombre ordinal donné $\geqslant 0$), *elle est aussi vraie pour tout ensemble Z de puissance $\aleph_{\alpha+1}$.*

Démonstration. Admettons que la proposition U est vraie pour tout ensemble Z de puissance $\aleph_\alpha$ et soit T un ensemble de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Supposons qu'on a divisé tous les sous-ensembles de T en deux classes M_1 et N_1 de telle sorte que toute famille d'ensembles disjoints de M_1 est au plus dénombrable. Soit $\{A_\eta^\xi\}$ le système d'ensembles qui satisfait aux conditions du lemme I.

Je dis qu'il existe un indice $\zeta < \omega_{\alpha+1}$, tel que tout ensemble A_ζ^ξ, où $\xi < \omega_\alpha$, appartient à N_1. En effet, admettons que ce n'est pas le cas: il existe alors pour tout indice $\eta < \omega_{\alpha+1}$ un indice $\xi_\eta < \omega_\alpha$, tel que l'ensemble $A_\eta^{\xi_\eta}$ appartient à M_1. Or, l'ensemble de tous les indices $\eta < \omega_{\alpha+1}$ étant de puissance $\aleph_{\alpha+1}$ et l'ensemble de tous les indices $\xi_\eta < \omega_\alpha$ étant de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$, on voit, sans peine qu'il existe un indice $\xi < \omega_\alpha$, tel que $\xi_\eta = \xi$ pour une infinité non dénombrable d'indices différents $\eta < \omega_{\alpha+1}$ (puisque $\aleph_0 \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$). Or, c'est impossible, les ensembles $A^{\xi}_{\eta} = A^{\xi}_{\eta'}$ étant disjoints (pour $\eta \neq \eta'$) et appartenant à M_1.

Posons

$$(1) \qquad R = T - \sum_{\xi < \omega_\alpha} A^{\xi}_{\xi}:$$

d'après la propriété 3^0 (lemme I) du système $\{A^{\xi}_{\eta}\}$ ce sera un ensemble de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$. Soit Z l'ensemble, dont les éléments sont les ensembles formés d'un seul élément (quelconque) de R et les ensembles A^{ξ}_{η}, où $\xi < \omega_\alpha$. L'ensemble Z est évidemment de puissance $\aleph_\alpha$ (comme somme d'un ensemble de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ et d'un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$) et ses éléments sont des sous-ensembles disjoints de T.

E étant un sous-ensemble de Z, désignons par S_E la somme de tous les sous-ensembles de T qui sont éléments de E. D'après (1) et d'après la définition de l'ensemble Z on trouve tout de suite

$$(2) \qquad T = S_Z.$$

E étant un sous-ensemble de Z, nous dirons que E appartient à la classe M, resp. à la classe N, si l'ensemble S_E ($\subset T$) appartient a la classe M_1, resp. à la classe N_1. On voit sans peine que toute famille d'ensembles disjoints de la classe M est au plus dénombrable, puisque si E et E_1 sont deux ensembles disjonts de la classe M, les ensembles S_E et S_{E_1} sont des sous-ensembles disjoints de T de la classe M_1 (et toute famille d'ensembles disjoints de la classe M_1 est, d'après l'hypothèse, au plus dénombrable).

Or, la proposition U étant vraie pour les ensembles de la puissance $\aleph_\alpha$, on en conclut (d'après $Z = \aleph_\alpha$) qu'il existe une suite infinie $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ d'ensembles de la classe N, telle que l'ensemble

$$(3) \qquad Q = Z - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n,$$

est au plus dénombrable.

De (3) résulte tout de suite que

$$(3^*) \qquad S_Z = S_Q + \sum_{n=1}^{\infty} S_{Z_n},$$

d'où, d'après (2):

$$(4) \qquad T = S_Q + \sum_{n=1}^{\infty} S_{Z_n}.$$

L'ensemble (3) est au plus dénombrable et les éléments de Q ($\subset Z$) sont soit des ensembles formés d'un seul élément de T, soit des ensembles A^{ξ}_{ξ} qui appartiennent à la classe N_1. Donc

$$(5) \qquad S_Q = D + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots,$$

où D est un ensemble au plus dénombrable d'éléments de T et $H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$ est une série finie ou dénombrable d'ensembles de la classe N_1.

De (4) et (5) résulte que

$$(6) \qquad T = D + \sum_{n=1}^{\infty} S_{Z_n} + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$$

Les ensembles Z_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) appartenant à N, les ensembles S_{Z_n} appartiennent à N_1. La formule (6) prouve donc que T est une somme d'un ensemble au plus dénombrable et d'une infinité dénombrable d'ensembles de la classe N_1. La proposition U est donc vraie pour l'ensemble T et le lemme II est démontré.

Lemme III. *Si $\aleph_\alpha$ est un aleph qui n'est pas inaccessible et si la proposition U est vraie pour tous les ensembles Z de puissance $< \aleph_\alpha$, elle est encore vraie pour les ensembles de puissance $\aleph_\alpha$.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme II nous pouvons supposer que l'indice α est un nombre ordinal de 2^{me} espèce. L'aleph $\aleph_\alpha$ n'étant pas inaccessible, on a

$$\aleph_\alpha = \sum_{n < \beta} \aleph_{\alpha_\xi}, \text{ où } \aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\alpha \text{ pour } \xi < \beta, \text{ et } \overline{\beta} < \aleph_\alpha.$$

Supposons que la proposition U est vraie pour $\overline{\overline{Z}} < \aleph_\alpha$. Soit T un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$. Nous pouvons poser, comme on voit sans peine:

$$(7) \qquad T = \sum_{\xi < \beta} T_\xi,$$

où $\overline{\overline{T}}_\xi < \aleph_{\alpha_\xi}$ et où $T_\xi T_\zeta = 0$ pour $\xi < \zeta < \beta$.

Supposons que les sous-ensembles de T sont divisés en deux classes, M_1 et N_1, telles que toute famille d'ensembles disjoints de M_1 est au plus dénombrable. Les ensembles T_ξ (où $\xi < \beta$) qui appartiennent à la classe M_1 sont donc en nombre fini ou en infinité dénombrable, soit $T_{\xi_1}, T_{\xi_2}, T_{\xi_3}, \ldots$ Les ensembles T_ξ, où $\xi < \beta$ et $\xi \neq \xi_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) appartiennent donc à la classe N_1; leur ensemble est évidemment de puissance $\overline{\beta} - \aleph_0 = \overline{\beta} < \aleph_\alpha$.

Soit Z l'ensemble (de puissance $\overline{\beta}$) dont les éléments sont des ensembles T_ξ, où $\xi < \beta$ et $\xi \neq \xi_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

E étant un sous-ensemble de Z, nous dirons que E appartient à la classe M, resp. à N, si la somme S_E de tous les sous-ensembles de T qui sont éléments de E appartient à M_1, resp. à N_1. Les éléments de Z étant des sous-ensembles disjoints de T, on voit sans peine (d'après l'hypothèse sur la classe M) que toute famille des ensembles disjoints de Z de la classe M est au plus dénombrable. D'après $\overline{\overline{Z}} = \overline{\beta} < \aleph_\alpha$, la proposition U étant d'après l'hypothèse vraie pour les ensembles Z de puissance $< \aleph_\alpha$, il existe donc une suite infinie $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ de sous-ensembles de Z de la classe N, telle que l'ensemble (3) est au plus dénombrable. Comme plus haut on en trouve la formule (3*).

Or, de la définition de l'ensemble Z et de (7) résulte sans peine que

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\xi_n} + S_Z,$$

donc, d'après (3*):

$$T = S_Q + \sum_{n=1}^{\infty} S_{Z_n} + \sum_{n=1}^{\infty} T_{\xi_n}. \tag{8}$$

Soit maintenant n un indice naturel donné. Toute famille de sous-ensembles disjoints de T_{ξ_n} de la classe M_1 est (d'après $T_{\xi_n} \subset T$) au plus dénombrable. D'après $\overline{\overline{T}}_{\xi_n} = \aleph_{\xi_n} < \aleph_\alpha$ et d'après l'hypothèse que la proposition U est vraie pour les ensembles de puissance $< \aleph_\alpha$, il existe une suite infinie de sous-ensembles T_{ξ_n} (donc des sous-ensembles de T), $E_1^n, E_2^n, E_3^n, \ldots$, telle que l'ensemble

$$Q_n = T_{\xi_n} - \sum_{k=1}^{\infty} E_k^n \tag{9}$$

est au plus dénombrable.

De (9) et de $E_k^n \subset T_{\xi_n}$ résulte que

$$T_{\xi_n} = Q_n + \sum_{k=1}^{\infty} E_k^n \quad (\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et la formule (8) donne

$$T = S_Q + \sum_{n=1}^{\infty} S_{Z_n} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} E_k^n.$$

L'ensemble $S_Q + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ étant au plus dénombrable et les ensembles E_k^n (n et k naturels) et S_{Z_n} ($n = 1, 2, 3, \ldots$) appartenant à N_1, on en conclut que la proposition U est vraie pour l'ensemble T.

Le lemme III est ainsi démontré.

Des lemmes II et III résulte tout de suite notre assertion sur la proposition U.

Nous ne donnerons ici qu'une seule application de notre résultat; d'autres on trouvera dans une Note de M. Ulam qui paraitre dans ce volume [1]).

En nous appuyant sur le résultat obtenu plus haut, nous démontrerons notamment la proposition suivante:

Soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal $> \aleph_0$, tel qu'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant \mathfrak{m}$, soit Z un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ et soit F une famille d'ensembles (de puissance quelconque), telle que tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de F appartient encore à F. Si Z a une infinité non dénombrable d'éléments communs avec tout ensemble de la famille F, Z est une somme d'une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun a une infinité non dénombrable d'éléments avec tout ensemble de la famille F.

Admettons que notre proposition n'est pas vraie et désignons par M la classe de tous les sous-ensembles de Z qui ont une infinité non dénombrable d'éléments communs avec tout ensemble de la famille F, et désignons par N la classe de tous les sous-ensembles de Z qui n'appartiennent pas à la classe M. La classe M satisfait, comme on voit sans peine, à la condition de la proposition U. D'après cette proposition, il existe donc une suite infinie $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$

[1]) voir ce volume, p. 221.

d'ensembles de la classe N, telle que l'ensemble $D = Z - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ est au plus dénombrable.

Soit n un nombre naturel donné. L'ensemble Z_n appartenant à la classe N, il existe (d'après la définition de cette classe) un ensemble E_n de la famille F qui a avec Z_n un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. Posons $E = E_1 E_2 E_3 \ldots$: d'après la propriété de la famille F, E appartient à F et, d'après $E \subset E_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$), les ensembles EZ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont tous au plus dénombrables. Or, d'après $D = Z - \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$, on a $EZ = ED + \sum_{n=1}^{\infty} EZ_n$: l'ensemble EZ est donc au plus dénombrable, contrairement à la propriété de l'ensemble Z.

L'hypothèse que notre proposition n'est pas vraie implique donc une contradiction.

Über gewisse Zerlegungen von Mengen [1]).

Von

Stanisław Ulam (Lwów).

In einer früheren Arbeit [2]) habe ich den folgenden Satz bewiesen [3]).

Es sei Z eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_1$. Werden alle Teilmengen dieser Menge in zwei Klassen, M und N so eingeteilt, dass es in M nur höchstens abzählbar viele elementfremde Mengen gibt, so existieren in N abzählbar viele Mengen $\{A_n\}$, für welche die Menge $(Z - \sum_{n=1}^{\infty} A_n)$ höchstens abzählbar ist.

Als eine Folgerung aus diesem Satze ergab sich die Unmöglichkeit, ein abzählbar additives Maß [4]) für alle Teilmengen einer Menge zu definieren, deren Mächtigkeit kleiner ist, als die erste „unerreichbare" Kardinalzahl.

Nun hat unlängst Herr W. Sierpiński gezeigt [5]), *dass in dem am Anfang genannten Satze die Annahme, dass Z von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ist, durch eine schwächere ersetzt werden kann, nämlich, dass die Mächtigkeit von Z kleiner ist als die erste unerreichbare Kardinalzahl.*

[1]) Die Sätze dieser Note wurden (bei der Voraussetzung dass die Mächtigkeit von $Z \aleph_1$ ist) am 7. III. 1931 an einer Sitzung der Poln. Math. Gesellschaft, Abteilung Lwów, dargestellt.

[2]) „Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre" Fund. Math. XVI (1930). S. 140—150.

[3]) l. c., S. 145, Satz „B".

[4]) l. c., S. 140.

[5]) W. Sierpiński: „Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles, dieser Band.