# Sur les transformations des sphères en des surfaces sphériques[1].

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Soient $Q_n$ une sphère $n$-dimensionnelle de rayon 1 et $S_n$ la surface ($n$-dimensionnelle) de la sphère $Q_{n+1}$. Désignons par $l_n$ le nombre:

$$l_n = \frac{2n+2-\sqrt{2n^2+2n}}{n+2}$$

$(l_1 = 2/3,\ l_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0{,}63\ldots,\ l_\infty = 2-\sqrt{2} = 0{,}586\ldots)$.

Je vais démontrer que *dans chaque transformation continue de $Q_n$ en $S_n$ il existe deux points de $Q_n$ à distance $\geqslant l_n$ qui se trouvent transformés en un seul point de $S_n$* (voir N3). De plus, cet énoncé est *précis* dans ce sens qu'il serait en défaut si l'on remplaçait $l_n$ par un nombre plus grand (v. N4)[2].

Dans la démonstration qui suit je vais préciser un peu un théorème de MM. Borsuk et Ulam[3]), ce qui présente d'ailleurs un intérêt intrinsèque (v. N2).

1. *Théorème auxiliaire de géométrie élémentaire. Soit, sur la surface ($n-1$ dimensionnelle) $S_{n-1}$ d'une sphère $n$-dimensionnelle de*

[1]) Partiellement présenté à la Soc. Pol. de Math. le 11. XI. 1932 à la Section de Varsovie et le 28. I. 1933 à la Section de Lwów.

[2]) En termes de la note de M. Ulam et moi *„Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles"*, qui paraîtra dans ce Journal, notre théorème s'énonce par l'égalité: $\tau(Q_n, S_n) = l_n$.

[3]) *Über gewisse Invarianten der $\varepsilon$-Abbildungen*, Math. Ann. 108 (1933).



*rayon 1, $p_0, \ldots, p_m$ un système fini*[1]) *de points dont les distances mutuelles sont inférieures à la longueur $k_n$ de l'arête d'un simplexe régulier $n$-dimensionnel inscrit dans $S_{n-1}$ $\left(k_n = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\right)$. Il existe alors une calotte ($n-1$ dimensionnelle) de diamètre $<2$ qui contient tous les points du système considéré.*

*Cette calotte contient donc la projection du simplexe (singulier) $p_0 \ldots p_m$ effectuée du centre de la sphère sur sa surface.*

Démonstration[2]). Envisageons d'abord le cas où $m = n$.

$p_i$ et $p_j$ étant considérés comme vecteurs (le centre de la sphère étant à l'origine des axes), désignons par $\alpha_{ij}$ l'angle qu'ils forment. L'hypothèse du théorème équivaut — comme on vérifie facilement — à l'inégalité: $\cos\alpha_{ij} > -1/n$ pour $i \neq j$, donc à l'inégalité $p_i \cdot p_j > -1/n$ (la multiplication des vecteurs étant conçue comme multiplication scalaire).

Posons $p = p_0 + \ldots + p_n$. Il vient

$$p \cdot p_i = p_0 \cdot p_i + \ldots + p_i \cdot p_i + \ldots + p_n \cdot p_i > 1 + n \cdot (-1/n) = 0.$$

En désignant par $\alpha_i$ l'angle formé par les vecteurs $p$ et $p_i$, on a donc $\cos\alpha_i = \frac{p \cdot p_i}{|p|} > 0$, d'où $\alpha_i < \frac{\pi}{2}$, c. à d. que chacun des vecteurs $p_0, \ldots, p_n$ forme un angle aigu avec le vecteur $p$. Il existe, par conséquent, un plan ($n-1$ dimensionnel) perpendiculaire au vecteur $p$ qui découpe la sphère entre le centre et une calotte contenant tous les points $p_i$. C'est bien la calotte demandée.

Passons, à présent, au cas général. Soit $P$ le plus petit polytope convexe contenant tous les points $p_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$ (autrement dit: $P =$ le simplexe singulier fermé $\overline{p_0 \ldots p_m}$). Evidemment $P$ est somme de tous les simplexes de la forme $p_{i_0} \ldots p_{i_n}$ (les indices étant différents ou non). Comme aucun de ces simplexes — d'après ce qui précède — ne contient le centre $c$ de la sphère, $c$ est situé en dehors du polytope $P$ entier. On en conclut, en vertu d'une propriété générale des ensembles convexes, qu'il existe un plan qui coupe l'espace $n$-dimensionnel entre $c$ et $P$; ce plan détermine la calotte demandée (pour s'en convaincre, on choisit dans le polytope $P$

[1]) Cette condition n'est pas d'ailleurs essentielle.

[2]) La démonstration est due à MM. Banach et Mazur.

le point $q$ le plus rapproché de $c$ et on mène le plan perpendiculaire au segment $cq$ par le point $q$).

2 [1]). *Théorème (invariance de coupure). Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux ensembles fermés et bornés situés dans l'espace cartésien $R_n$. Soit $L$ une sphère (ouverte) de rayon $r$, contenue dans une région-composante bornée de l'ensemble $R_n - \mathfrak{X}$. Si l'ensemble $\mathfrak{Y}$ peut être obtenu de $\mathfrak{X}$ par une transformation continue $f(x)$ telle que l'égalité $f(x) = f(x')$ implique l'inégalité $|x - x'| < r \cdot k_n$* [2])*, l'ensemble $\mathfrak{Y}$ est une coupure de l'espace* ($k_n$ désigne la longueur de l'arête d'un simplexe régulier inscrit dans la sphère $n$-dimensionnelle de rayon 1).

Projettons l'ensemble $\mathfrak{X}$ sur la surface de la sphère $L$ (par une projection centrale effectuée du centre de $L$). Projettons ensuite cette surface sphérique sur la surface ($S_{n-1}$) de la sphère concentrique de rayon 1. La fonction $g(x)$ ainsi définie transforme $\mathfrak{X}$ en $S_{n-1}$ et satisfait aux deux conditions suivantes: 1° $|g(x) - g(x')| \leqslant \frac{|x - x'|}{r}$, 2° $g$ est une transformation „essentielle" (au sens de M. H. Hopf) [3]), c. à d. qu'elle ne se laisse pas réduire par une déformation continue à une constante, sans quitter la surface $S_{n-1}$. Or, l'existence d'une fonction essentielle qui transforme un ensemble situé dans $R_n$ en $S_{n-1}$ étant une condition suffisante pour que cet ensemble soit une coupure de l'espace [4]), le théorème sera donc démontré dès que l'énoncé suivant, sur l'*invariance de l'existence des transformations essentielles*, sera établi:

*Soient: $\mathfrak{X}$ un espace compact (arbitraire), $g(x)$ une transformation essentielle de cet espace en $S_{n-1}$, $\sigma$ un nombre positif tel que*

(1) *l'inégalité* $|x - x'| < \sigma$ *implique* $|g(x) - g(x')| < k_n$,

[1]) Les énoncés de ce N° ne sont autre chose que ceux de la note citée de MM. Borsuk et Ulam, précisés un peu. Les raisonnements ne diffèrent non plus essentiellement de ceux de la note citée.

[2]) Dans le cas où $\mathfrak{X} = S_{n-1}$ et $r = 1$, le nombre $k_n$ ne peut être remplacé par aucun nombre plus grand. V. la note précitée N 9.

[3]) Car — comme le prouve M. Borsuk (Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), p. 384—5) — la fonction $g$ ne se laisse pas prolonger à l'espace $R_n$ entier et ce dernier fait implique que $g$ est une transformation essentielle. Cf. d'ailleurs la note précitée de MM. Borsuk et Ulam, N 8.

[4]) K. Borsuk, Math. Ann. 106 (1932), p. 247 et P. Alexandroff, ibid. p. 226. La condition en question équivaut à la non-connexité de l'espace fonctionnel des transformations continues en sous-ensembles de $S_{n-1}$.



*et $f(x)$ une transformation continue de $\mathfrak{X}$ en un espace $\mathfrak{Y}$ telle que*

(2) $f(x) = f(x')$ *entraîne* $|x - x'| < \sigma$ [1]).

*Dans ces hypothèses il existe une transformation essentielle de $\mathfrak{Y}$ en $S_{n-1}$.*

A ce but il suffira de définir une fonction $h(y)$ qui transforme $\mathfrak{Y}$ en un sous-ensemble de $S_{n-1}$ de façon qu'on ait pour chaque $x$

$$|hf(x) - g(x)| < 2.$$

Car d'une part, cette inégalité implique que la fonction $hf(x)$ est essentielle [2]) et, d'autre part, cette dernière fonction ne saurait être essentielle sans que $h(y)$ le soit.

*Construction de la fonction $h(y)$* [3]). On conclut aussitôt de (2) que, $\eta$ étant un nombre positif suffisamment petit, la condition $|f(x) - f(x')| < \eta$ implique que $|x - x'| < \sigma$, donc, selon (1), que $|g(x) - g(x')| < k_n$.

Décomposons l'espace $\mathfrak{Y}$ en un système d'ensembles ouverts de diamètres $< \eta/2$:

$$\mathfrak{Y} = A_1 + \ldots + A_k, \quad \delta(A_i) < \eta/2.$$

Soit $a_i$ un point (arbitraire) de $\mathfrak{X}$ satisfaisant à la condition: $f(a_i) \varepsilon A_i$ et posons $p_i = g(a_i)$. D'après un théorème général [4]), il existe une transformation continue $q(y)$ de l'espace $\mathfrak{Y}$ en un sous-ensemble du simplexe (singulier) fermé $\overline{p_1 \ldots p_k}$ telle que, pour chaque système d'indices on ait:

$$(3) \qquad q\Big(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_m} - \sum_{i \neq i_j} A_i\Big) \subset \overline{p_{i_1} \ldots p_{i_m}}$$

(la sommation étant étendue à tous les indices distincts de $i_1, \ldots, i_m$).

Soit $x$ un point arbitraire de $\mathfrak{X}$. Le point $y = f(x)$ étant un point de $\mathfrak{Y}$, on peut poser $y \varepsilon [A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_m} - \sum_{i \neq i_j} A_i]$. Il vient, d'une part, $A_{i_j} \cdot A_{i_{j'}} \neq 0$, d'où $|f(a_{i_j}) - f(a_{i_{j'}})| < \eta$, donc $|g(a_{i_j}) - g(a_{i_{j'}})| < k_n$;

[1]) Pour en déduire le théorème, on posera: $\sigma = r\,k_n$.

[2]) D'après un théorème de M. Borsuk, Fund. Math. 18 (1932), p. 202.

[3]) Ni le fait que la fonction $g$ est essentielle, ni même celui que ses valeurs remplissent $S_{n-1}$, n'interviendront guère dans la suite.

[4]) Cf. le „Überführungssatz" de M. Alexandroff; je me sers ici de l'énoncé qui se trouve dans ma note publiée dans ce vol. p. 196, remarque 7).

d'autre part, comme $f(x)\,\varepsilon\, A_{i_j}$, il en résulte $|f(x)-f(a_{i_j})|<\eta/2$, d'où $|g(x)-g(a_{i_j})|<k_n$. Par conséquent, si l'on pose $p_0=g(x)$, le système des points $p_0, p_{i_1}, \ldots, p_{i_m}$ satisfait aux conditions du théorème géométrique du N 1. On en conclut, que, $h(y)$ désignant la projection du point $q(y)$ (qui appartient, d'après (3), au simplexe $p_{i_1}\ldots p_{i_m}$) sur la surface $S_{n-1}$, on a $|h(y)-p_0|<2$, c. à d. $|hf(x)-g(x)|<2$.

**3. Théorème.** *Dans chaque transformation continue $f$ de $Q_n$ en $S_n$ $(n \geqslant 1)$ il existe deux points $x$ et $x'$ tels que*

$$f(x)=f(x') \quad \textit{et} \quad |x-x'| \geqslant l_n.$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons, pour abréger, $Q_n=Q$, $S_n=S$, $S_{n-1}=F$ (= frontière de $Q$). On vérifie facilement que $l_n$ satisfait aux conditions: $l_n=1-r$ où $1-r=r\cdot k_n$. Soit $L$ une sphère ouverte concentrique à $Q$ et de rayon $r$.

Supposons, par impossible, que la condition $f(x)=f(x')$ entraîne $|x-x'|<l_n$, donc qu'elle entraîne:

$$\text{(i)} \quad |x-x'|<1-r, \qquad \text{(ii)} \quad |x-x'|<r\cdot k_n.$$

D'après (i) les ensembles $f(L)$ et $f(F)$ sont disjoints. Comme ensemble connexe, $f(L)$ est donc situé dans une seule région-composante de l'ensemble $S-f(F)$; en désignant par $Y$ le complémentaire de cette région, on voit donc que:

$$\text{(1)} \quad f(F)\subset Y \qquad \text{(2)} \quad f(L)\cdot Y=0 \qquad \text{(3)} \quad Y\neq S$$

(4) $Y$ n'est pas une coupure.

Les formules (1) et (2) entraînent:

(5) $$F\subset f^{-1}(Y) \quad \text{et} \quad L\cdot f^{-1}(Y)=0,$$

car d'après (1): $F\subset f^{-1}f(F)\subset f^{-1}(Y)$ et d'après (2): $f^{-1}f(L)\cdot f^{-1}(Y)=0$, d'où $L\cdot f^{-1}(Y)=0$.

Posons $X=f^{-1}(Y)$. Il vient $f(X)=ff^{-1}(Y)=Y$ et, en tenant compte des formules (5) et (ii), on voit aussitôt que toutes les hypothèses du théor. du N 2 sont vérifiées, tandis que sa thèse ne l'est pas ($Y$ peut, au point de vue topologique, être considéré comme sous-ensemble de l'espace $R_n$, en raison de (3)).

On parvient ainsi à la contradiction prévue.



**4. Théorème.** *A chaque $\epsilon>0$ correspond une transformation continue $f$ de $Q_n$ en $S_n$ telle que la condition $f(x)=f(x')$ entraîne* $x-x'|\leqslant l_n+\epsilon$.

Posons comme auparavant: $Q=Q_n$, $L$=la sphère de rayon $1-l_n$ concentrique à $Q$ (c. à d. de centre 0); à la place de $S_n$ considérons le bord $K$ d'un simplexe (non-singulier) $q_0\ldots q_{n+1}$. Soit $M$ la sphère concentrique à $Q$ et de rayon $1-l_n-\epsilon$.

Désignons, en général, par $Fr(X)$ la frontière de l'ensemble $X$.

La fonction $f(x)$ sera définie comme une superposition de trois fonctions $f_1, f_2, f_3$.

1) La fonction $f_1$ transforme l'ensemble $Q-L$ en $\overline{L}-M$ et est une identité sur $Fr(L)$; elle s'obtient en projettant la surface de la sphère de rayon $\varrho$ $(1-l_n\leqslant\varrho\leqslant 1)$ sur celle de la sphère de rayon $1-l_n-\epsilon\cdot(\varrho+l_n-1)/l_n$. Pour $x\,\varepsilon\, L$ on pose $f_1(x)=x$. On voit aussitôt que:

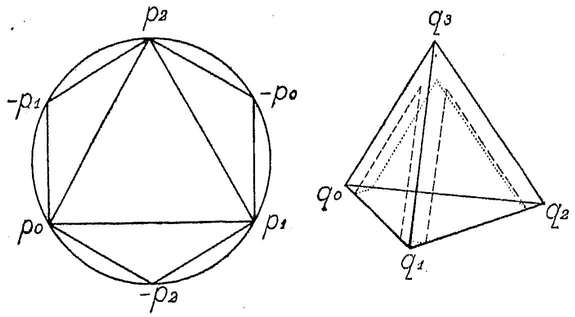
(i) l'inégalité $|x-x'|>l_n+\epsilon$ entraîne $f_1(x)\neq f_1(x')$.

2) Soit $T=p_0\ldots p_n$ un simplexe régulier inscrit dans la sphère $L$. Nous définissons le polytope $P$ (inscrit dans $L$) comme fermeture de la somme des simplexes:

$$T+\sum_{i=0}^{n} p_0\ldots p_{i-1}(-p_i)\,p_{i+1}\ldots p_n.$$

La transformation $f_2$ est une homéomorphie qui transforme la sphère $\overline{L}$ en $P$, en projettant la surface de chaque sphère à rayon $\leqslant 1-l_n$ en la surface du polytope inscrit dans cette sphère et homothétique à $P$.

3) La fonction $f_3$ transforme le polytope $P$ en $K$. On la définit d'abord aux sommets du polytope. On pose, notamment, $f_3(p_i)=q_i$ et $f_3(-p_i)=q_{n+1}$. Comme transformation simpliciale, elle peut être ensuite étendue au polytope $P$ entier (considéré comme un complexe); à savoir, en convenant que, $x$ étant un point du simplexe fermé $\overline{p_0\ldots(\pm p_i)\ldots p_n}$, $f_3(x)$ est le point du simplexe $\overline{q_0\ldots q_i\ldots q_n}$ resp. du simplexe $\overline{q_0\ldots q_{i-1}\,q_{n+1}\,q_{i+1}\ldots q_n}$ (suivant que le signe de $p_i$ soit $+$ ou $-$) ayant les mêmes coordonnées barycentriques que $x$.




Sphère $L$, polytope $P$. Ligne pointillée $=f(Fr(Q))$.

$x$ et $x'$ étant deux points différents tels que $f_2(x)=f_2(x')$, ils appartiennent évidemment à deux simplexes ($\leqslant n-1$ dimensionnels) ayant les mêmes sommets „positifs" et des différents sommets „négatifs". Comme, en outre, ces points ont les mêmes coordonnées barycentriques, l'angle $\alpha = \sphericalangle x0x'$ est maximum, lorsque $x$ et $x'$ coïncident avec les sommets „négatifs" [1]). On a dans ce cas: $\cos\alpha = -1/n$. Autrement dit:

(ii) les conditions $x \neq x'$ et $f_3 f_2(x) = f_3 f_2(x')$ impliquent que $|x-x'| \leqslant l_n$ et que $x \,\varepsilon\, Fr(L)$.

Nous déduirons de là que la fonction $f(x)=f_3 f_2 f_1(x)$ est la fonction demandée.

Supposons, en effet, que $f(x)=f(x')$ et considérons d'abord le

[1]) Comme M. **Banach** m'a fait observer, cela se laisse établir par le calcul suivant: soit

$$x = -c_0 p_0 + c_1 p_1 + \ldots + c_k p_k, \quad x' = -c_0 p_n + c_1 p_1 + \ldots + c_k p_k,$$
$$c_0 + c_1 + \ldots + c_k = 1, \quad c_i \geqslant 0, \quad k \leqslant n-1.$$

Il s'agit de prouver que $\cos \sphericalangle x0x' \geqslant -1/n$, c. à d. que $n\,x\,x' + |x|\cdot|x'| \geqslant 0$. Or, en supposant (pour simplifier les notations) que le rayon de la sphère $L$ est $=1$, il vient:

$$n\,x\,x' + |x|\cdot|x'| = 2\frac{n+1}{n}c_0(c_1+\ldots+c_k) + \frac{n+1}{n}[(n+1)(c_1^2+\ldots+c_k^2) - (c_1+\ldots+c_k)^2] \geqslant 0$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz.



cas, où les deux points $x$ et $x'$, supposés différents, appartiennent à $Fr(L)$. On a alors $x=f_1(x)$ et $x'=f_1(x')$ et on conclut directement de (ii) que $|x-x'| \leqslant l_n$.

Reste à considérer le cas où $x$ n'appartient pas à $Fr(L)$. Supposons que $|x-x'| > l_n + \epsilon$. Il vient d'après (i): $f_1(x) \neq f_1(x')$ et, en substituant dans (ii): $f_1(x)$ à $x$ et $f_1(x')$ à $x'$, on aurait $f_1(x) \,\varepsilon\, Fr(L)$, ce qui entraîne $x \,\varepsilon\, Fr(L)$, contrairement à l'hypothèse. On a donc nécessairement: $|x-x'| \leqslant l_n + \epsilon$.