Reguläre Kurven als Bilder der Kreislinie [1]).

Von

Georg Nöbeling (Wien).

Jedes lokal zusammenhängende Kontinuum R ist bekanntlich ein eindeutiges, stetiges Bild der Strecke [2]), oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Kreislinie K. Über diese bloße Existenzaussage hinaus ist bisher wenig über Abbildungen von K auf R bekannt. Wir wollen im Folgenden diese Abbildungen für den Fall, dass R eine reguläre Kurve ist, etwas näher studieren.

Ein metrisches Kontinuum R ist eine reguläre Kurve [3]), wenn jeder Punkt p von R in beliebig kleinen Umgebungen mit endlicher Begrenzung liegt. Existiert für einen Punkt p eine natürliche Zahl o mit der Eigenschaft, dass p in beliebig kleinen Umgebungen mit höchstens o-punktiger Begrenzung liegt, so heisst die kleinste Zahl $o(p)$ mit dieser Eigenschaft die Ordnung des Punktes p. Wächst hingegen die Randpunktanzahl bei jeder sich auf p zusammenziehenden Folge von Umgebungen ins Unendliche, so heisst p von wachsender Ordnung, und wir setzen in diesem Falle $o(p)=\aleph_0$. Eine reguläre Kurve, welche kein topologisches Bild der Kreislinie enthält, heisst ein Baum [4]). Mit $z(p)$ bezeichnen wir die grösste natürliche Zahl z mit der Eigenschaft, dass für alle hinreichend kleinen Umgebungen U von p die Menge $U-(p)$ in mindestens z Komponenten zerfällt; existiert eine solche Zahl nicht, so setzen

[1]) Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. K. Menger.

[2]) Hahn, Wiener Ber. 123, S. 2433; Mazurkiewicz, Fund. Math. 1, S. 166.

[3]) Menger, Math. Ann. 95, S. 279; Urysohn, Mém. s. l. multipl. Cant. II. Verh. Ak. Amsterd. 13, 4.

[4]) Mazurkiewicz, Fund. Math. 2, S. 123.

wir $z(p)=\aleph_0$. Ist schliesslich α eine eindeutige, stetige Abbildung der Kreislinie K auf die Kurve R, so bezeichnen wir mit $m_\alpha(p)$ die Mächtigkeit der Urbildmenge des Punktes p.

Wir behaupten die folgenden beiden Sätze:

Satz 1. *Eine reguläre Kurve R ist dann und nur dann ein Baum, wenn bei jeder eindeutigen, stetigen Abbildung α der Kreislinie K auf R die Beziehung*

$$m_\alpha(p) \geqq o(p)$$

gilt.

Satz 2. *Für jede reguläre Kurve R existiert eine eindeutige, stetige Abbildung der Kreislinie K auf R, bei welcher für jeden Punkt p die Beziehung*

$$z(p) \leqq m_\alpha(p)$$

und für jeden Punkt p von endlicher Ordnung die Beziehung

$$m_\alpha(p) \leqq o(p)$$

gilt [5]). *Ist R speziell ein Baum, so gilt sogar für jeden Punkt p die Gleichung*

$$m_\alpha(p) = o(p).$$

Wir beginnen mit dem

Beweis des Satzes 1. Zunächst zeigen wir, dass, wenn B ein Baum und α eine eindeutige, stetige Abbildung der Kreislinie K auf B ist, für jeden Punkt p von B die Ungleichung $m_\alpha(p) \geqq o(p)$ gilt. Wir beweisen sogar die folgende Behauptung: Ist L ein beliebiges im kleinen zusammenhängendes Kontinuum, p ein Punkt von L und $Z(p)$ die Mächtigkeit der Menge aller Komponenten von $L-(p)$, so gilt bei jeder eindeutigen, stetigen Abbildung der Kreislinie K auf L die Ungleichung $m_\alpha(p) \geqq Z(p)$. Zum Beweise dieser Behauptung genügt es wegen der Ungleichung $Z(p) \leqq \aleph_0$ [6]) zu zeigen, dass für jede natürliche Zahl $n \leqq Z(p)$ die Ungleichung $m_\alpha(p) \geqq n$ gilt. Wir greifen aus dem System der Komponenten von $L-(p)$ n verschiedene Komponenten $L_1, \dots, L_n$ und aus jeder Komponente L_i

[5]) Übrigens lässt sich eine Abbildung konstruieren, bei welcher auch die zweite Ungleichung $m_\alpha(p) \leqq o(p)$ für alle Punkte von R gilt.

[6]) Da die Komponenten von $L-(p)$ als Komponenten einer offenen Menge offen und paarweise fremd sind, ist ihre Anzahl $\leqq \aleph_0$.

einen Punkt p_i heraus; es sei q_i ein α-Urbildpunkt von p_i; zur Vereinfachung setzen wir noch $p_{n+1}=p_1$ nnd $q_{n+1}=q_1$. Wir dürfen die Numerierung sofort so gewählt denken, dass, wenn man den Kreis K in positivem Sinne durchläuft, die Punkte q_i in der natürlichen Reihenfolge passiert werden. Nun bezeichnen wir mit K_i denjenigen Teilbogen von K, welcher, vom Kreismittelpunkt aus gesehen, den Punkt q_i zum rechten und den Punkt q_{i+1} zum linken Endpunkt hat. Dann ist die Bildmenge von K_i ein Kontinuum, welches die Punkte p_i und p_{i+1} und daher auch den Punkt p enthält, da p die Punkte p_i und p_{i+1} in L trennt. Mithin muss im Innern von K_i ein α-Urbildpunkt von p enthalten sein. Weil dies für jedes $i\leqq n$ gilt, so gibt es also mindestens n verschiedene α-Urbildpunkte von p, womit unsere Behauptung bereits bewiesen ist. Ist nun $L=B$ speziell ein Baum, so gilt für jeden Punkt P die Gleichung $Z(p)=z(p)$ [7]). Also ergibt sich aus der soeben bewiesenen Behauptung, dass, wenn α eine Abbildung von K auf B ist, für jeden Punkt von B die Ungleichnng $m_\alpha(p)\geqq o(p)$ gilt, womit die erste Hälfte des Satzes 1 bewiesen ist.

Wir zeigen jetzt, dass, wenn die reguläre Kurve R kein Baum ist, eine eindeutige, stetige Abbildung α der Kreislinie auf R existiert, bei welcher für mindestens einen Punkt p von R die Ungleichung $m_\alpha(p)<o(p)$ erfüllt ist. Zu diesem Zwecke beweisen wir die folgende

Zwischenbehauptung. *Ist die reguläre Kurve R kein Baum, so kann man für einen geeigneten Punkt p mit einer Ordnung $o(p)\geqq 2$ die Menge $R-(p)$ als Summe $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} R_i$ von Kontinuen R_i darstellen, sodass erstens kein Durchschnitt $R_i\cdot R_{i+1}$ leer ist und zweitens in jeder Umgebung von p fast alle R_i enthalten sind.*

Da die Kurve R kein Baum ist, enthält R einen topologischen Kreis S. Nun sind zwei Fälle möglich.

Entweder enthält der Kreis S einen Punkt p, welcher kein lokaler Zerschneidungspunkt [8]) von R ist und als Punkt von S eine Ordnung $o(p)\geqq 2$ besitzt. Wegen der Regularität von R existiert eine sich monoton fallend auf p zusammziehende Folge von zusammenhängenden Umgebungen U_k ($k=1, 2,\dots$ ad inf.) mit endlichen Relativbegrenzungen. Dabei können und wollen wir überdies noch annehmen, dass $U_0=R$ ist und für jedes $k\geqq 0$ die Beziehung $\overline{U}_{k+1}\subset U_k$ gilt. Nun besteht für jedes $k\geqq 0$ die Menge $\overline{U}_k-U_{k+1}$ aus endlich vielen Komponenten. Weil aber U_k zusammenhängend und p kein lokaler Zerschneidungspunkt von R ist, also je zwei Punkte von $\overline{U}_k-(p)$ durch einen Teilbogen von $\overline{U}_k-(p)$ miteinander verbunden werden können, so gibt es endlich viele Teilbogen von $\overline{U}_k-(p)$, sodass die Summe dieser Bogen und der Komponenten von $\overline{U}_k-U_{k+1}$ ein Kontinuum ist. Bezeichnen wir diese Summe mit $R_k=R_{-k}$, so gilt also die Beziehung $\overline{U}_k-U_{k+1}\subset R_k=R_{-k}\subset\overline{U}_k-(p)$. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Mengen R_i ($i=0, \pm 1, \pm 2,\dots$) die in der Zwischenbehauptung verlangten Eigenschaften besitzen.

Oder alle Punkte von S sind lokale Zerschneidungspunkte von R. Dann gibt es unter ihnen einen Punkt p von genau zweiter Ordnung [9]). Also existiert eine sich auf p monoton fallend zusammenziehende Folge von Umgebungen U_k ($k=1,2,\dots$ ad inf.), mit zweipunktigen Begrenzungen. Wir dürfen sofort annehmen, dass für jedes k die Beziehung $\overline{U}_{k+1}\subset U_k$ gilt und dass ausserdem U_1 so klein ist, dass $S\cdot(R-\overline{U}_1)$ nicht leer ist. Dann ist erstens die Menge $R_0=R-U_1$ ein Kontinuum, da U_1 genau zwei Randpunkte besitzt, welche wegen $S\cdot(R-\overline{U}_1)\neq 0$ durch einen Teilbogen von $S\cdot(R-U_1)$ miteinander verbunden sind. Weil zweitens für $k\geqq 1$ die Menge U_k genau zwei Randpunkte besitzt, so enthält die Menge $\overline{U}_k-U_{k+1}$ entweder nur eine Komponente, die wir dann mit $R_k=R_{-k}$ bezeichnen, oder genau zwei Komponenten R_k und R_{-k}. Durch eventuelle suczessive Vertauschung der Indices k und $-k$ kann man es erreichen, dass für jedes ganze i der Durchschnitt $R_i\cdot R_{i+1}$ nichtleer ist. Dann besitzen offenbar die Mengen R_i ($i=0, \pm 1, \pm 2,\dots$ ad inf.) die in der Zwischenbehauptung verlangten Eigenschaften. Da schliesslich p die Ordnung 2 hat, ist hiermit auch für den zweiten Fall die Zwischenbehauptung bewiesen.

Es seien p ein Punkt und R_i ($i=0, \pm 1, \pm 2,\dots$) Kontinua,

[7]) Menger, Math. Ann. 96, S. 574.

[8]) Ein Punkt p heisst lokaler Zerschneidungspunkt, wenn eine zusammenhängende Umgebung U von p existiert, für welche $U-(p)$ in mindestens zwei Komponenten zerfällt.

[9]) Whyburn, Monatsh. f. Math. u. Phys. 36, S. 309.

welche die Eigenschaften unserer Zwischenbehauptung besitzen. Wir wollen eine Abbildung α der Kreislinie K auf die Kurve R konstruieren, bei welcher der Punkt p genau einen Urbildpunkt besitzt. Die Kreislinie $K=(r=1,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$ zerfällt durch Tilgung der Punkte $\varphi=0$, $\varphi=\frac{1}{2^k}\cdot\pi$ und $\varphi=\left(2-\frac{1}{2^k}\right)\cdot\pi$ $(k=1,\ 2,\ldots$ ad inf.) in abzählbar viele offene Teilbogen, die wir folgendermassen numerieren. Den Bogen mit den Endpunkten $\frac{1}{2}\pi$ und $\left(2-\frac{1}{2}\right)\pi$ bezeichnen wir mit K_0; den Bogen mit den Endpunkten $\frac{1}{2^k}\pi$ und $\frac{1}{2^{k+1}}\pi$ bzw. $\left(2-\frac{1}{2^k}\right)\pi$ und $\left(2-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\pi$ bezeichnen wir mit K_k, bzw. K_{-k}. Den in dem einpunktigen Durchschnitt $\overline{K}_l\cdot\overline{K}_{l+1}$ enthaltenen Punkt nennen wir e_l. Mit p_l bezeichnen wir einen in dem voraussetzungsgemäss nicht leeren Durchschnitt $R_l\cdot R_{l+1}$ enthaltenen Punkt. Weil nun die Mengen R_l Teilkontinua der regulären Kurve R und daher Streckenbilder sind, können wir den abgeschlossenen Kreisbogen $\overline{K}_l$ eindeutig und stetig auf das Kontinuum R_l abbilden und zwar derart, dass der Punkt e_{l+1} auf den Punkt p_{l+1} und der Punkt e_l auf den Punkt p_l abgebildet ist. Den Punkt $\varphi=0$ bilden wir auf den Punkt p von R ab. Die so definierte Abbildung α von K auf R ist stetig; dies folgt für jeden Punkt von K, welcher in einem offenen Bogen K_l liegt, aus der Stetigkeit der Abbildung von $\overline{K}_l$ auf R_l; für jeden Punkt e_l von K aus der Stetigkeit der Abbildungen von $\overline{K}_l$ und $\overline{K}_{l+1}$ auf R_l und R_{l+1} und der Tatsache, dass bei beiden Abbildungen der Durchschnittspunkt e_l von $\overline{K}_l$ und $\overline{K}_{l+1}$ auf den im Durchschnitt $R_l\cdot R_{l+1}$ enthaltenen Punkt p_l abgebildet wird; die Stetigkeit der Abbildung α im Punkte $\varphi=0$ schliesslich folgt daraus, dass für jede Umgebung U des Bildpunktes p von $\varphi=0$ fast alle Mengen R_l in U enthalten sind. Bei dieser Abbildung α von K auf R wird kein von $\varphi=0$ verschiedener Punkt auf den Punkt p abgebildet; denn jeder von $\varphi=0$ verschiedene Punkt von K liegt in einem Kreisbogen $\overline{K}_l$ und ist daher auf einen Punkt eines R_l abgebildet und keine Menge R_l enthält den Punkt p.

Nun hat der Punkt p eine Ordnung $o(p)\geqq 2$. Mithin gilt, da $m_\alpha(p)=1$ ist, die Ungleichung $m_\alpha(p)<o(p)$, womit auch die zweite Hälfte des Satzes 1 bewiesen ist.

Der Beweis des Satzes 2 zerfällt in zwei Schritte. Der erste Schritt besteht in der Konstruktion einer monoton wachsenden Folge von gewöhnlichen Bäumen [10]) $C_k\subset R$ $(k=1,\ 2,\ldots)$, deren Summe in R überall dicht liegt. Beim zweiten Schritt konstruieren wir für jedes k eine eindeutige, stetige Abbildung α_k der Kreislinie K auf den gewöhnlichen Baum C_k, bei welcher für jeden Punkt von C_k die Urbildanzahl gleich seiner Ordnung bzgl. C_k ist. Diese Abbildungen werden gegen eine eindeutige, stetige Abbildung α von K auf R konvergieren, welche die in Satz 2 verlangten Eigenschaften besitzt.

Wir beginnen mit der Konstruktion der Bäume C_k. Bekanntlich lässt sich die reguläre Kurve R für jede natürliche Zahl k als Summe von endlich vielen Teilkontinua $R_{i_1,\ldots,i_k}$ (welche natürlich auch reguläre Kurven sind) mit folgenden Eigenschaften darstellen:

(1) der Durchmesser von $R_{i_1,\ldots,i_k}$ ist $<\frac{1}{2^k}$;

(2) $R_{i_1,\ldots,i_k i_{k+1}}$ ist eine Teilmenge von $R_{i_1,\ldots,i_k}$;

(3) je zwei $R_{i_1,\ldots,i_k}$ mit gleicher Indexanzahl haben höchstens endlich viele Punkte gemein.

Mit S_k bezeichnen wir die wegen (3) endliche Menge aller derjenigen Punkte von R, die in zwei oder mehr Mengen $R_{i_1,\ldots,i_k}$ enthalten sind. Wegen (2) ist die Menge S_k eine Teilmenge von S_{k+1}. Wir bezeichnen die abzählbar vielen Punkte der in R dichten Menge $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k$ in irgendeiner Reihenfolge mit p_i $(i=0,\ 1,\ldots)$.

Wir setzen nun $p_0=B_0=C_0$ und machen die Induktionsvoraussetzung, dass für irgendein $k\geqq 0$ bereits ein die Punkte $p_0,\ldots,p_k$ enthaltender gewöhnlicher Teilbaum C_k von R vorliegt, der als Summe von B_0 und k halboffenen, paarweise fremden Bogen B_i $(i=1,\ 2,\ldots,\ k)$ dargestellt ist. Es sei p_j $(j>k)$ der erste nicht in dem Baume C_k enthaltene Punkt. Wir verbinden diesen Punkt p_j durch einen Teilbogen von R irreduzibel mit dem Baume C_k. Die Summe dieses Verbindungsbogens und des Baumes C_k ist ein gewöhnlicher Baum C_{k+1}, und $B_{k+1}=C_{k+1}-C_k$ ist ein halboffener

[10]) Ein Baum heisst *gewöhnlich*, wenn er als Summe von endlich vielen Bogen dargestellt werden kann.

Bogen. Die auf diese Weise induktiv definierten B_k und C_k haben offenbar die folgenden Eingenschaften:

(4) B_0 ist einpunktig; B_i $(i \geqq 1)$ ist ein halboffener Bogen;

(5) je zwei Mengen B_i sind fremd;

(6) für jedes $k \geqq 1$ ist die Summe $C_k = \sum_{i=0}^{k} B_i$ ein gewöhnlicher Baum;

(7) für jedes $k \geqq 1$ gibt es eine Zahl r_k $(\geqq k)$, sodass der Baum C_{r_k} die Menge S_k enthält.

Hiermit ist die Definition der Bäume C_k abgeschlossen, und wir beginnen nunmehr die Konstruktion der Abbildungen α_k. Ist p ein Punkt von R, so bezeichnen wir mit $n_k(p)$ seine Ordnung bezgl. des Baumes C_k [11]. Für jeden Punkt p bilden die $n_k(p)$ eine monoton wachsende Folge. Wenn es für diese Folge eine obere Schranke gibt, so nennen wir die kleinste obere Schranke $n(p)$; ihr sind dann fast alle Zahlen $n_k(p)$ gleich. Ist die Folge der $n_k(p)$ nicht beschränkt, so setzen wir $n(p) = \aleph_0$.

Wir wollen nun durch vollständige Induktion eine Folge von offenen Kreisbogen K_i der Kreislinie $K = (r = 1,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ und gleichzeitig für jedes $k \geqq 0$ eine eindeutige, stetige Abbildung α_k des Kreises K auf den Baum C_k mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(8) bedeutet l_i die Länge des Kreisbogens K_i, so gilt $\lim l_i = 0$;

(9) aus $i < j$ folgt entweder $K_i \supset K_j$ oder $K_i \cdot K_j = 0$;

(10) die α_k-Urbildmenge eines beliebigen Punktes p von C_k ist Summe von $n(p)$ in keinem K_j mit $j > k$ liegenden Punkten q_n und von $n(p) - n_k(p)$ durch Punkte q_n begrenzte K_{i_n}, wobei die Zahlen $i_n > k$ und unter allen Zahlen $> k$ dadurch charakterisiert sind, dass p Endpunkt von B_{i_n} ist;

(11) das α_k-Urbild von B_k ist K_k;

(12) für jeden Punkt von $K - K_{k+1}$ stimmt das α_k-Bild mit dem α_{k+1}-Bild überein.

[11]) Für jeden Punkt p von $R - C_k$ ist natürlich $n_k(p) = 0$; ebenso ist $n_0(p) = 0$ für jeden Punkt p aus R.

Mit α_0 bezeichnen wir die Abbildung von $K = K_0$ auf die aus genau einem Punkt p bestehende Menge B_0. Es sei q_n der Punkt $\varphi = \frac{2\pi}{2^{n-1}}$ $(n = 1, \ldots, n(p))$ [12]) von K. Die $n(p) - n_0(p) = n(p)$ offenen Kreisbogen zwischen den Punkten q_n numerieren wir folgendermassen: wegen (6) gibt es genau $n(p)$ halboffene Bogen B_{i_n}, welche den Punkt p zum Endpunkt haben. Wir bezeichnen nun die Kreisbogen zwischen den Punkten q_n in irgendeiner Reihenfolge mit K_{i_n}, und das System dieser paarweise fremden K_{i_n} mit T_0.

Ist nun l irgendeine Zahl $\geqq 0$, so machen wir die Induktionsvoraussetzung, dass für jedes $k \leqq l$ erstens ein System T_k von Kreisbogen $K_i \subset K$ vorliegt, die paarweise fremd, in einer Hälfte von $K_k \in T_0 + \ldots + T_{k-1}$ enthalten [13]) und deren Indizes dieselben sind wie die der in Punkten von B_k endenden Bogen B_i, und zweitens eine eindeutige, stetige Abbildung α_k von K auf C_k existiert, derart, dass α_k und alle Bogen K_i aus $T_0 + \ldots + T_l$ die Beziehungen (10)—(12) erfüllen.

Wir wollen nun eine Abbildung α_{l+1} und ein System T_{l+1} konstruieren derart, dass die Induktionsvoraussetzung für $l+1$ statt l gilt. Da nach (6) der Bogen B_{l+1} in einem B_i $(i \leqq l)$ endet, enthält T_i einen Kreisbogen K_{l+1}. Die Endpunkte dieses K_{l+1} seien φ_1 und φ_2 $(> \varphi_1)$. Wir ordnen zunächst jedem Punkt von $K - K_{l+1}$ sein α_l-Bild als α_{l+1}-Bild zu. Sodann bilden wir den halboffenen Kreisbogen $\varphi_1 < \varphi \leqq \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ topologisch auf B_{l+1} ab. Hieran stetig anschliessend bilden wir den Bogen $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \leqq \varphi < \varphi_2$ so auf B_{l+1} ab, dass erstens für jeden der höchstens abzählbar vielen Punkte von B_{l+}, welche Endpunkte eines Bogens B_j $(j > l+1)$ sind, die Urbildmenge aus einem Kreisbogen besteht und sodass zweitens jeder der übrigen Punkte von B_{l+1} genau einen Urbildpunkt besitzt [14]).

[12]) Im Falle $n(p) = \aleph_0$ bedeutet dies natürlich, dass n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

[13]) Im Falle $k = 0$ fällt diese Bedingung natürlich weg.

[14]) Dies kann folgendermassen bewerkstelligt werden: Es seien $p_1, p_2, \ldots$ die Punkte von B_{l+1}, in denen Bogen B_j $(j > l+1)$ enden. Zunächst wählt man eine topologische Abbildung β_0 des Intervalls $0 \leqq x < 1$ auf B_{l+1}. Ist x_1 das β_0-Urbild von p_1, so ordnet man jedem $x \leqq x_1$ sein β_0-Bild als β_1-Bild zu; dem Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_1 + \frac{1}{2}$ ordnet man als β_1-Bild den Punkt p_1 zu; jedem Punkt $x + \frac{1}{2}$

Damit ist die Abbildung α_{l+1} von K auf C_{l+1} vollständig definiert. Um nun die nötigen Kreisbogen zu definieren, sei p ein Punkt von B_{l+1}, in welchem mindestens ein Bogen B_j mit $j > l+1$ endet. Die genaue Anzahl dieser in p endenden Bogen B_j $(j > l+1)$ ist $n(p) - n_{l+1}(p)$, und sie mögen die Indizes i_n tragen. Es sei $\psi_1 \leqq \varphi \leqq \psi_2$ die auf dem Kreisbogen $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \leqq \varphi < \varphi_2$ liegende α_{l+1}-Urbildmenge von p. Wir bezeichnen mit q_n den Punkt $\psi_1 + \frac{\psi_2 - \psi_1}{2^{n-1}}$ $(n = 1, \ldots, n(p) - n_{l+1}(p))$ und mit K_{i_n} den offenen, zwischen q_n und q_{n+1} liegenden Kreisbogen. Das System aller dieser Kreisbogen K_{i_n} nennen wir T_{l+1}.

Die Kreisbogen K_i aus T_{l+1} sind paarweise fremd, in $K_{l+1} \epsilon T_0 + \ldots + T_l$ enthalten und ihre Indizes sind dieselben wie der in B_{l+1} endenden Bogen B_i. Wir behaupten nun, dass für jedes $k \leqq l+1$ die Abbildung α_k und die Kreisbogen K_i aus $T_0 + \ldots + T_{l+1}$ die Bedingung (10) erfüllen. Für $k \leqq l$ haben wir hierzu wegen der Induktionsvoraussetzung, nach welcher (10) für α_k und die K_i aus $T_0 + \ldots + T_l$ bereits gilt, nur zu zeigen, dass jeder Punkt q_n, von dem in (10) die Rede ist, in keinem K_j von T_{l+1} mit $j > k$ enthalten ist. Dies ist aber klar: da (10) nach Induktionsvoraussetzung für α_k und die K_i aus $T_0 + \ldots + T_l$ gilt, so liegt q_n in keinem K_j von $T_0 + \ldots + T_l$ mit $j > k$, insbesondere also nicht in K_{l+1}, mithin in überhaupt keinem K_i aus T_{l+1}, da diese in K_{l+1} enthalten sind. Um jetzt zu zeigen, dass die Abbildung α_{l+1} und die K_i von $T_0 + \ldots + T_{l+1}$ der Beziehung (10) genügen, wenn man darin k durch $l+1$ ersetzt, bemerken wir zunächst, dass für jeden Punkt des Baumes C_l, abgesehen von dem auf C_l gelegenen Endpunkt von B_{l+1}, die α_{l+1}-Urbildmenge mit der α_l-Urbildmenge übereinstimmt, sodass also für alle diese Punkte p die Beziehung (10) erfüllt ist. Die α_{l+1}-Urbildmenge des auf C_l liegenden Endpunktes von B_{l+1} ist gleich

$(x_1 < x < 1)$ ordnet man das β_0-Bild von x als β_1-Bild zu. Analog konstruiert man aus β_1 eine Abbildung β_2, bei welcher p_2 ein Intervall de Länge $\frac{1}{\psi}$ zur Urbildmenge hat. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens konvergieren die Abbildungen β_k gegen eine Abbildung β des Intervalls $0 \leqq x < 2$, bei welcher jedem Punkt p_l als Urbildmenge ein Intervall der Länge $\frac{1}{2^l}$, jedem der übrigen Punkte genau ein Punkt entspricht.

seiner α_l-Urbildmenge, vermindert um den Kreisbogen K_{l+1} (der ja nun auf B_{l+1} abgebildet ist), also Summe von $n(p)$ Punkten und $n(p) - n_l(p) - 1 = n(p) - n_{l+1}(p)$ Kreisbogen K_j $(j > k+1)$, deren Indizes gerade diejenigen sind, deren zugehörige B_j in p enden. Schliesslich sei p ein Punkt von B_{l+1}. Ist $n(p) = n_{l+1}(p)$, ist also p nicht Endpunkt eines B_j $(j > l+1)$, so ist entweder $n(p) = 1$, d. h. p ist Endpunkt von B_{l+1}; in diesem Falle besteht die Urbildmenge von p nur aus dem Punkte $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$; oder es ist $n(p) = 2$, d. h. p ist innerer Punkt von B_{l+1}; dann enthält die Urbildmenge von p genau zwei Punkte, nämlich einen auf dem Kreisbogen $\varphi_1 < \varphi < \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$, den andern auf dem Kreisbogen $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} < \varphi < \varphi_2$. Ist hingegen $n(p) > n_{l+1}(p)$, ist also p Endpunkt von $n(p) - n_{l+1}(p)$ Bogen B_j $(j > l+1)$, so besteht die Urbildmenge von p aus $n(p)$ Punkten, nämlich dem in $\varphi_1 < \varphi \leqq \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ liegenden Urbildpunkt q und den Punkten ψ_1, $q_n = \psi_1 + \frac{\psi_2 - \psi_1}{2^{n-1}}$ $(n = 1, \ldots, n(p) - n_{l+1}(p))$ [15]) und zweitens aus den $n(p) - n_{l+1}(p)$ Kreisbogen zwischen den Punkten q_n. Also ist tatsächlich für jeden Punkt p von B_{l+1} die α_{l+1}-Urbildmenge Summe von $n(p)$ Punkten q_n und $n(p) - n_{l+1}(p)$ Kreisbogen K_{i_n} aus T_{l+1}. Die Indizes dieser Kreisbogen sind nach Konstruktion dieselben wie diejenigen der in p endenden Bogen B_{i_n}. Die Punkte q_n liegen in keinem K_i aus T_{l+1}, wohl aber in K_{l+1} aus $T_0 + \ldots + T_l$, und daher in keinem K_j aus $T_0 + \ldots + T_l$ mit $j > l+1$, weil nach Induktionsvoraussetzung über die T_k, wie man leicht beweist, je zwei von den $K_1, \ldots, K_l$ verschiedene K_i aus $T_0 + \ldots + T_l$ paarweise fremd sind. Hiermit ist bewiesen, dass (10) für α_k $(k \leqq l+1)$ und die K_i aus $T_0 + \ldots + T_{l+1}$ gilt. Die Gültigkeit der Beziehungen (11) für $k \leqq l+1$ ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion der Abbildung α_{l+1}.

Damit ist die induktive Konstruktion bendet, und wir dürfen für jedes $k \geqq 0$ eine Abbildung α_k und ein System T_k mit den

[15]) Ist p Endpunkt von B_{l+1}, so ist $n_{l+1}(p) = 1$ und $\psi_1 = q = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$; ist p innerer Punkt von B_{l+1}, so ist $n_{l+1}(p) = 2$, $\psi_1 \neq q$ und $q_n \neq q$.

Eigenschaften gegeben denken, die wir oben als Induktionsvoraussetzung formuliert haben. Dann bilden die K_l der Summe $\sum_{l=0}^{\infty} T_l$ eine Folge, und jede Abbildung α_k besitzt in Bezug auf sämtliche K_l die Eigenschaften (10)—(12), weil sie sie in Bezug auf die K_l jeder Teilsumme $T_0+\ldots+T_l$ besitzt. Die Beziehung (8) ergibt sich daraus, dass die K_l von T_{l+1} paarweise fremd und in einer Hälfte von $K_{l+1}\in T_0+\ldots+T_l$ enthalten sind. Die Richtigkeit der Bahauptung (9) ergibt sich folgendermassen: Für die K_i aus T_0 ist sie sicher richtig, da je zwei solcher K_i fremd sind. Nehmen wir an, (8) sei richtig für die K_i aus $T_0+\ldots+T_l$, und es seien zwei nichtfremde K_i und K_j $(i<j)$ aus $T_0+\ldots+T_{l+1}$ gegeben, die nicht beide in $T_0+\ldots+T_l$ liegen. Dann muss entweder K_i oder K_j in $T_0+\ldots+T_l$ liegen, da alle Kreisbogen aus T_{l+1} parweise fremd sind. Läge aber K_i in T_{l+1}, so wäre $i>l+1$ (denn in B_{l+1} enden nur B_i mit $i>l+1$) und damit auch $j>l+1$. Wie wir aber oben bemerkten, sind je zwei K_i und K_j aus $T_0+\ldots+T_{l+1}$, die nicht unter den $K_1,\ldots,K_{l+1}$ vorkommen, paarweise fremd. Bleibt also nur der Fall, dass K_j in T_{l+1} und K_i in $T_0+\ldots+T_l$ liegt. Dann gilt $K_j\subset K_{l+1}$ und daher $K_i\cdot K_{l+1}\neq 0$. Da nun K_i und K_{l+1} in $T_0+\ldots+T_l$ liegen und aus $K_i\cdot K_{l+1}\neq 0$ die Ungleichung $i<l+1$ folgt (da die $K_i\in T_0+\ldots+T_l$, abgesehen von den $K_1,\ldots,K_l$, paarweise fremd sind), gilt nach Induktionsvoraussetzung die Beziehung $K_{l+1}\subset K_i$ und daher auch $K_j\subset K_i$, womit (9) vollständig bewiesen ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Abbildungen α_k gegen eine eindeutige, stetige Abbildung α von K auf die Kurve R konvergieren, und zwar in folgendem Sinne:

(13) das α-Bild eines Punktes q von K ist der Limes der α_k-Bilder p_k von q.

Es sei also q ein beliebiger Punkt von K. Wir behaupten, dass die α_k-Bilder p_k von q gegen einen Punkt p konvergieren, und zwar gleichmässig für alle Punkte q. Es sei r_k für irgendein k die in (7) definierte Zahl. Wenn q in keinem Kreisbogen K_j mit $j>r_k$ liegt, so ist $p_{r_k}=p_m$ wegen (12) für alle $m>r_k$. Andernfalls existiert wegen (10), anzuwenden auf den Punkt p_{r_k} und die Abbildung α_{r_k}, ein den Punkt q enthaltendes K_{i_n} $(i_n>r_k)$, welches durch α_{r_k} ganz auf p_{r_k} abgebildet wird. Dann werden auch die Endpunkte von K_{i_n}

durch α_{r_k} auf p_{r_k} abgebildet. Weil aber die Endpunkte wegen (10) in keinem K_j mit $j>r_k$ enthalten sind, so haben sie den Punkt p_{r_k} wegen (12) für jedes $m>r_k$ zum α_m-Bild. Hieraus folgt, da nach (11) und (12) das α_m-Bild $(m>r_k)$ von $\overline{K}_{i_n}$ in der Menge $(p_{r_k})+\sum_{l=r_k+1}^{m} B_l$ liegt und $\overline{K}_{i_n}$ zusammenhängend ist, dass das α_m-Bild von q in der den Punkt p_{r_k} enthaltenden Komponente der Menge $(p_{r_k})+\sum_{l=r_k+1}^{m} B_l$ liegt. Diese Komponente muss aber, da nach (7) der Baum $C_{r_k}=\sum_{l=0}^{r_k} B_l$ die Menge S_k enthält und $C_m=\sum_{l=0}^{m} B$ ein Baum ist, in der durch Punkte von S_k begrenzten Summe $R_{j_1,\ldots,j_k}+\ldots+R_{h_1,\ldots,h_k}$, deren Summanden die sämtlichen den Punkt p_{r_k} enthaltenden $R_{i_1,\ldots,i_k}$ sind, enthalten sein. Wegen (1) hat also für jedes $m>r_k$ der Punkt p_m von dem Punkte p_{r_k} einen Abstand $<\frac{1}{2^{k-1}}$, und diese Abschätzung gilt auch in dem ersten Falle, wo $p_m=p_{r_k}$ ist. Also konvergieren die Punkte p_m gegen einen Punkt p, und zwar gleichmässig für alle Punkte q, was wir behauptet hatten. Wir ordnen nun den Punkt p dem Punkte q als α-Bild zu. Wegen der gleichmässigen Konvergenz der Punkte p_m ist die hiermit definierte Abbildung stetig. Um zu zeigen, dass diese Abbildung α den Kreis K auf die ganze Kurve R abbildet, sei p ein Punkt des Baumes C_k. Wegen (10) und $n(p)\geqq 1$ enthält die α_k-Urbildmenge von p mindestens einen Punkt q, welcher in keinem Kreisbogen K_j mit $j>k$ enthalten ist und daher wegen (12) und (13) den Punkt p zum α-Bild hat. Mithin ist p, und weil p ein beliebiger Punkt von C_k ist, der ganze Baum C_k in der α-Bildmenge von K enthalten. Nun liegt aber die Menge $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ und daher wegen (7) die Menge $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ in R überall dicht. Also ist ganz R das α-Bild von K.

Bevor wir nun zeigen, dass die so definierte Abbildung α die in unserm Satze 2 geforderten Eigenschaften besitzt, beweisen wir eine wichtige Eigenschaft von α. Es sei p ein beliebiger Punkt von R und Q_1 die Menge aller derjenigen α-Urbildpunkte von p, welche in höchstens endlich vielen Kreisbogen K_j enthalten sind. Dann gilt:

(14) es gibt ein $k = k(p)$, sodass $Q_1 \cdot K_j = 0$ für jedes $j > k$, und für jedes solche k stimmt Q_1 mit der in (10) definierten $n(p)$-punktigen Menge von α_k-Urbildern von p überein.

Wenn die Menge Q_1 leer ist, haben wir nur zu zeigen, dass $n(p) = 0$ ist, dass also aus $n(p) \neq 0$ die Beziehung $Q_1 \neq 0$ folgt. Nun muss, wenn $n(p) \neq 0$ ist, der Punkt p auf irgendeinem Baume C_k liegen. Dann enthält die α_k-Urbildmenge von p wegen (10) mindestens einen Punkt q, welcher in keinem K_j mit $j > k$ liegt. Wegen (12) ist dann p für jedes $j > k$ das α_j-Bild und daher wegen (13) auch das α-Bild von q. Mithin liegt q in der Menge Q_1, d. h. Q_1 ist nicht leer. Damit ist (14) für den Fall $Q_1 = 0$ bewiesen. Nehmen wir nun an, dass Q_1 mindestens einen Punkt q_1 enthält. Dann wählen wir k so, dass q_1 in keinem K_j mit $j > k$ enthalten ist. Wenn nun p' das (in C_k liegende) α_k-Bild von q_1 ist, so ist p' auch für $j > k$ das α_j-Bild und daher das α-Bild von q_1, also mit p identisch. Es sei nun q_2 ein zweiter Punkt von Q_1, vorausgesetzt, dass ein solcher existiert. Nehmen wir per absurdum an, es gäbe ein $k' > k$ mit der Eigenschaft, dass q_2 in $K_{k'}$ enthalten ist. Einerseits ist nun, aus denselben Gründen wie beim Punkte q_1, das $\alpha_{k'}$-Bild von q_2 mit p identisch. Anderseits aber liegt das $\alpha_{k'}$-Bild von q_2 auf dem zu C_k fremden Bogen $B_{k'}$, ist also von p verschieden. Es kann also kein k' mit der genannten Eigenschaft geben, d. h. kein Punkt von Q_1 liegt in einem K_j mit $j > k$, und für jeden Punkt q_1 von Q_1 ist, wie wir zeigten, das α_k-Bild von q_1 mit p identisch, d. h. Q_1 ist eine Teilmenge der in (10) definierten $n(p)$-punktigen Menge. Ist umgekehrt q ein Punkt dieser letzteren Menge, liegt also q in keinem K_j mit $j > k$, so ist wegen (12) das α_k-Bild von q für jedes $j > k$ mit dem α_j-Bild und daher wegen (13) mit dem α-Bild von q, d. h. mit p identisch. Also liegt q in Q_1, womit (14) vollständig bewiesen ist.

Wir schreiten jetzt an den Beweis der Ungleichung $z(p) \leqq m_\alpha(p)$. Da für jeden Punkt p von R die Ungleichung $z(p) \leqq \aleph_0$ gilt, genügt es, den Fall zu betrachten, dass $m_\alpha(p)$ eine natürliche Zahl ist. Ist nun eine beliebige Umgebung des Punktes p gegeben, so ist auch die den Punkt p enthaltende Komponente U dieser Umgebung selbst eine Umgebung von p. Wir werden zeigen, und dies ist offenbar hinreichend, dass $U-(p)$ in höchstens $m_\alpha(p)$ Komponenten zerfällt. Nehmen wir an, wir wären bereits im Besitze erstens

einer Umgebung $V(Q)$ der α-Urbildmenge Q von p und zweitens von s Komponenten U_i $(i = 1, \ldots, s;\ s \leqq m_\alpha(p))$ von $U-(p)$, derart, dass das α-Bild von $V(Q)$ in der Menge $(p) + \sum_{i=1}^{s} U$ enthalten ist. Dann sei W eine beliebige Komponente von $U-(p)$. Weil U zusammenhängend ist, hat W den Punkt p zum Häufungspunkt. Also ist die α-Urbildmenge von W zu $V(Q)$ nicht fremd. Hieraus folgt aber, dass W mit mindestens einer Komponente U_i Punkte gemein hat, also mit einer U_i identisch ist. Damit sind wir wegen $s \leqq m_\alpha(p)$ bereits am Ziele. Wir zeigen nun die Existenz einer Umgebung $V(Q)$ und der Komponenten U_i. Es seien q_i $(i = 1, \ldots, m_\alpha(p))$ die (endlich vielen) Punkte von Q. Wenn wir nun beweisen können, dass jeder Punkt q_i in einem (offenen) Kreisbogen $(q_i' q_i'')$ mit den Endpunkten q_i und q_i'' liegt, derart, dass jeder dieser Kreisbogen genau einem Punkt q_i enthält, die α-Bilder dieser Kreisbogen in U liegen und die α-Bilder der Endpunkte q_i' und q_i'' insgesamt in höchstens $m_\alpha(p)$ Komponenten U_j von $U-(p)$ liegen, so sind wir offenbar fertig. Zunächst können wir wegen der gleichmässigen Konvergenz der Abbildungen α_k gegen die Abbildung α eine abgeschlossene Hilfsumgebung $\overline{V_0(Q)}$ von Q finden, sodass für alle k, die grösser als ein gewisses k_0 sind, das α_k Bild und das α-Bild von $\overline{V_0(Q)}$ in U enthalten ist. Betrachten wir nun erstens die Menge Q_1, von der in (14) die Rede ist. Ihre Punkte seien q_i $(i = 1, \ldots, n(p))$. Da wegen (8) und (9) die Menge aller Punkte, die in höchstens endlich vielen K_j enthalten sind, in K überall dicht liegt, können wir für jedes $i \leqq n(p)$ einen offenen, den Punkt q_i und keinen weiteren Punkt von Q enthaltenden Kreisbogen $(q_i' q_i'') \subset V_0(Q)$ finden, dessen Endpunkte q_i' und q_i'' in höchstens endlich vielen K_j liegen. Wegen (14) gibt es dann ein $k > k_0$, sodass die endliche Menge $\sum_{i=1}^{n(p)} ((q_i) + (q_i') + (q_i''))$ mit jedem K $(j > k)$ einen leeren Durchschnitt hat. Wegen (12) und (13) sind dann die α_k-Bilder p_i' und p_i'' der Punkte q_i' und q_i'' gleichzeitig ihre α-Bilder. Nun sei L die den Punkt p enthaltende Komponente des Durchschnittes $U \cdot C_k$. Falls nur die Punkte q_i' und q_i'' hinreichend nahe bei den Punkten q_i liegen, was wir offenbar annehmen dürfen, so liegen die Punkte p_i' und p_i'' in L. Da die Menge $L-(p)$ nach Definition der Zahl $n(p)$ in höchstens $n(p)$ Komponenten zerfällt, so liegen also die α-Bilder p_i' und p_i'' der Punkte q_i' und q_i'' in höchstens $n(p)$ Komponenten von $L-(p)$ und daher auch in höchstens $n(p)$ Komponenten U_i von $U-(p)$. Zweitens betrachten wir die Menge $Q-Q_1$. Jeder ihrer Punkte q_i $(i=n(p)+1,\dots,m_\alpha(p))$ liegt in beliebig kleinen Kreisbogen K_j. Folglich kann man zu jedem Punkt q_i einen ihn und keinen weiteren Punkt von Q enthaltenden Kreisbogen $K_{j_i}\subset \subset \overline{V_0(Q)}$ finden. Die beiden Endpunkte q_i' und q_i'' von K_{j_i} haben ein gemeinsames α_{j_i}-Bild p_i, nämlich den in C_{j_i-1} liegenden Endpunkt von B_{j_i}, da nach (11) nur K_{j_i}, aber keiner seiner Endpunkte durch α_{j_i} auf B_{j_i} abgebildet wird.

Dieser Punkt p_i ist nach (12) sogar für jedes $j>j_i$ das α_j-Bild und daher wegen (13) das α-Bild der Punkte q_i' und q_i''. Die Menge der Endpunkte q_i' und q_i'' $(i=n(p)+1,\dots,m_\alpha(p))$ hat also die Menge der Punkte p_i $(i=n(p)+1,\dots,m_\alpha(p))$, die natürlich auf höchstens $m_\alpha(p)-n(p)$ Komponenten U_i von $U-(p)$ liegen kann, zur α-Bildmenge. Insgesamt liegen also die α-Bilder der sämtlichen Endpunkte q_i' und q_i'' $(i=1,\dots,m_\alpha(p))$ in höchstens $m_\alpha(p)$ Komponenten U_i von $U-(p)$. Da ausserdem die Kreisbogen $(q_i'q_i'')$ in $\overline{V_0(Q)}$ und daher ihre α-Bilder in U liegen, so ist hiermit nach dem oben Bemerkten die Ungleichung $z(p)\leqq m_\alpha(p)$ bewiesen.

Um für die Punkte p von endlicher Ordnung $o(p)$ die Ungleichung $m_\alpha(p)\leqq o(p)$ zu zeigen, beweisen wir zunächst eine Zwischenbehauptung. Es sei q ein Punkt von K, der in unendlich vielen Kreisbogen K_j liegt; es seien K_{j_l} $(j_1<j_2<j_3<\dots)$ die sämtlichen, den Punkt q enthaltenden K_j. Dann behaupten wir: für jedes l ist der Durchschnitt $\overline{B}_{j_l}\cdot B_{j_{l+1}}$ nichtleer und die B_{j_l} konvergieren gegen das α-Bild von q. Nach (11) ist nämlich B_{j_l} das α_{j_l}-Bild von K_{j_l} und daher liegt wegen $K_{j_{l+1}}\subset K_{j_l}$ auch das α_{j_l}-Bild von $K_{j_{l+1}}$ auf B_{j_l}. Weil nun nach Voraussetzung für kein j mit $j_l<j<j_{l+1}$ die Beziehung $K_{j_{l+1}}\subset K_j$ gilt, ist nach (9) und (12) für jedes solche j das α_j-Bild von $K_{j_{l+1}}$ mit dem α_{j_l}-Bild von $K_{j_{l+1}}$ identisch, also Teilmenge von B_{j_l}. Dagegen ist nach (11) das $\alpha_{j_{l+1}}$-Bild von $K_{j_{l+1}}$ mit $B_{j_{l+1}}$ identisch, dessen abgeschlossene Hülle daher mit B_{j_l} einen nichtleeren Durchschnitt haben muss. Die Konvergenz der B_{j_l} gegen das α-Bild von q folgt daraus, dass erstens die Kreisbogen K_{j_l} wegen (8) gegen q konvergieren, dass zweitens B_{j_l} das α_{j_l}-Bild von K_{j_l} ist und dass drittens die Abbildungen α_{j_l} gleichmässig gegen die Abbildung α konvergieren. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Nun sei p ein beliebiger Punkt von R und Q eine endliche, etwa t Punkte enthaltende Menge von α-Urbildern von p. Wir wollen die Ungleichung $t\leqq o(p)$ beweisen. Es seien q_k $(k=1,\dots,r)$ diejenigen Punkte von Q, die in unendlichen vielen Kreisbogen K_j liegen, vorausgesetzt natürlich, dass es solche Punkte gibt. Wir wählen ein j_0 so gross, dass erstens, falls $n(p)$ endlich ist, die Gleichung $n(p)=n_{j_0}(p)$, und falls $n(p)$ unendlich ist, die Ungleichung $n_{j_0}(p)\geqq t$ gilt, und dass zweitens kein K_j mit $j>j_0$ einen der nicht unter den Punkten q_k vorkommenden Punkte von Q und mehr als einen Punkt q_k enthält. Bezeichnen wir mit $K_{j_l^k}$ $(j_0<j_1^k<j_2^k<\dots)$ die sämtlichen den Punkt q_k enthaltenden Kreisbogen K_j mit $j>j_0$, so enthält nach unserer Zwischenbehauptung die Menge $(p)+\sum\limits_{l=1}^{\infty}B_{j_l^k}$ einen in p endenden Bogen, und weil kein B_j zweien dieser Summen angehört, sind je zwei dieser Bogen bis auf den Endpunkt p zueinander fremd. Damit haben wir das Resultat: falls unter den Punkten von Q genau r solche vorkommen, die in unendlich vielen K_j enthalten sind, so existiert in R ein r-Bein B^1 mit dem Scheitel p. Wenn die Menge Q mit diesen Punkten noch nicht erschöpft ist, so wollen wir die Punkte des Restes mit q_k $(k=r+1,\dots,t)$ bezeichnen. Diese Punkte q_k liegen in keinen K_j mit $j>j_0$. Also liegen ihre α_{j_0}-Bilder, die wegen (12) und (13) mit ihren α-Bildern, d. h. mit p übereinstimmen, auf dem Baume C_{j_0}.

Da es nach (10), angewandt auf p und α_{j_0}, genau $n(p)$ α_{j_0}-Urbilder von p gibt, die in keinem K_j $(j>j_0)$ liegen, und hier $t-r$ solche α_{j_0}-Urbilder vorliegen, so ist $n(p)\geqq t-r$. Also gilt nach Wahl von j_0 auch die Beziehung $n_{j_0}(p)\geqq t-r$. Daher enthält der Baum C_{j_0} ein $(t-r)$-Bein B^2 mit dem Scheitel p. Da dieses B^2 als Teilmenge von C_{j_0} zu allen B_j mit $j>j_0$ fremd und daher mit dem r-Bein B^1 nur den Scheitel p gemein hat, ist die Summe B^1+B^2 ein t-Bein mit dem Scheitel p. Also ist $t\leqq o(p)$.

Nehmen wir nun an, der Punkt p habe eine endliche Ordnung $o(p)$. Da nach dem soeben Bewiesenen für jede natürliche Zahl $t\leqq m_\alpha(p)$ die Ungleichung $t\leqq o(p)$ gilt, so muss auch $m_\alpha(p)\leqq o(p)$ sein, womit auch die zweite Ungleichung unseres Satzes 2 bewiesen ist.

Schliesslich sei R ein Baum. Wir wollen zeigen, dass für jeden Punkt p von R die Gleichung $m_\alpha(p)=o(p)$ gilt. Zunächst gilt nach dem Satz 1 die Beziehung $m_\alpha(p)\geqq o(p)$. Anderseits gilt nach dem soeben Bewiesenen für jeden Punkt von endlicher Ordnung die Beziehung $m_\alpha(p) \leqq o(p)$. Also brauchen wir nur noch zu zeigen, dass für einen Punkt p von wachsender Ordnung die Beziehung $m_\alpha(p) = o(p)$ gilt, d. h. dass für jeden solchen Punkt p die α-Urbildmenge höchstens abzählbar ist. Zunächst enthält die Menge Q_1 aller derjenigen α-Urbildpunkte von p, die in höchstens endlich vielen Kreisbogen K_j liegen, $n(p)$, also höchstens abzählbar viele Punkte. Wenn wir nun zeigen, dass schon sämtliche Urbildpunkte von p in Q_1 enthalten sind, so sind wir offenbar am Ziel. Nehmen wir an, es gäbe auf K einen Punkt q, welcher in unendlich vielen Kreisbogen K_j enthalten ist und den Punkt p zum α-Bild hat. Es seien K_{j_i} $(j_1 < j_2 < \ldots)$ die sämtlichen den Punkt q enthaltenden Kreisbogen K_j. Da p als Punkt von wachsender Ordnung kein Endpunkt ist, muss er auf einem Baum C_k und daher auf einem Bogen B_j liegen. Wir wählen ein h so gross, dass $j_h > j$ ist. Nun enthält nach unserer Zwischenbehauptung die Summe $\sum\limits_{i=h}^{\infty} B_{j_i}$ einen in p endenden Bogen B^1, dessen zweiter Endpunkt p' in $B_{j_{h-1}}$ liegt. Anderseits enthält der Baum C_{j_h} einen die Punkte p und p' verbinden, abgeschlossenen Bogen B^2. Da der Baum $C_{j_{h-1}}$ wegen (5) zu allen Bogen B_{j_i} $(i \geqq h)$ fremd ist, sind auch die beiden Bogen B^1 und B^2 zueinander fremd; die Summe $B^1 + B^2$ ist also ein topologischer Kreis, was der Voraussetzung, dass R ein Baum ist, widerspricht. Hiermit ist die Annahme, dass es α-Urbilder des Punktes p gibt, die nicht in der abzählbaren Menge Q_1 liegen, widerlegt, und unser Satz 2 vollständig bewiesen.

Über die dimensionellen Komponenten.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich ein von Herrn Alexandroff gestelltes Problem [2]) im Fall der mengentheoretischen Dimension gelöst. Die vorliegende Note enthält die Lösung des genannten Problems im Fall der Dimension mod m. Zu diesem Zweck werden gewisse Mengenfunktionen $a^r_m(F)$ eingeführt, welche die Urysohnsche Mengenfunktion $d_r(F)$ [3]) (den r-ten *Dimensionsgrad*) ersetzen sollen.

1. F sei eine geschränkte, abgeschlossene Teilmenge des R^n. Ist z ein algebraischer Zyklus in F, so werden wir mit $e(z, F)$, bzw. $e'(z, F)$ die Berandungs- bzw. Homologieschranke [4]) von z in F bezeichnen. Ist $Z = (z_1, z_2, \ldots)$ ein wahrer Zyklus [5]) (im allgemeinen nach variablem Modul) in F so setzen wir:

$$e(Z, F) = \underline{\lim}\, e(z_i, F) \tag{1}$$

$$e'(Z, F) = \underline{\lim}\, e'(z_i, F). \tag{2}$$

2. Sind $Z = (z_1, z_2, \ldots)$ und $Z' = (z_1, z_2', \ldots)$ wahre Zyklen in F, $Z \simeq Z'$, so ist

$$e(Z, F) = e(Z', F); \quad e'(Z, F) = e'(Z', F). \tag{3}$$

[1]) Fund. Math. XIX, p. 243—247.

[2]) Alexandroff: *Dimensionstheorie* (im folgenden mit *Dim* zitiert) Math. Ann. 106 (1932), 69, S. 215—216, Problem II. Ich folge dieser Arbeit in Terminologie und Bezeichnungsweise.

[3]) Urysohn. Fund. Math. VIII, p. 353.

[4]) *Dim* 23, S. 179.

[5]) *Dim* 21, S. 178.