10. Beweis des Satzes III*). Es seien $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen, für welche $S_n \subset \sum_{i=0}^{n} A_i$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes 9. gibt es eine derartige stetige Abbildung $f \in R^{n S_n}$, dass für jedes $p \in f(S_n)$ die Urbildmenge $f^{-1}(p)$ in einer der Menge $A_0 \cdot S_n$, $A_1 \cdot S_n, \ldots, A_n \cdot S_n$, etwa in $A_{i_p} \cdot S_n$ enthalten ist. Aber nach dem Satze II gibt es ein solches $p_0 \in S_n$, dass $f(p_0) = f(p_0^*)$ ist und somit die antipodischen Punkte p_0 und p_0^* in der Menge $A_{i_{p_0}}$ enthalten sind, w. z. b. w.

11. Der Satz III lässt sich noch folgendermassen formulieren:

Bei jeder Zerlegung einer n-dimensionalen euklidischen Vollkugel in n Mengen ist der Durchmesser mindestens einer von diesen Mengen dem Durchmesser der ganzen Kugel gleich.

Daraus ergibt sich folgendes

Korollar. *Bei jeder Zerlegung einer Vollkugel im Hilbertschen Raume in endlich viele Mengen ist der Durchmesser mindestens einer von diesen Mengen dem Durchmesser der ganzen Vollkugel gleich.*

Bemerkung. Es gibt eine Zerlegung von S_n in $(n+2)$ Mengen, von denen jede einen kleineren Durchmesser als S_n hat. In der Tat, betrachten wir die simpliziale Zerlegung eines der S_n umgeschriebenen regelmässigen Simplexes Δ in $(n+2)$ Simplexe $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n+2}$, welche als gemeinsamen Eckpunkt den Mittelpunkt von S_n haben. Die gesuchte Zerlegung ist dann durch die Formel $S_n = \sum_{i=1}^{n+2} \Delta_i \cdot S_n$ gegeben.

Die folgende Frage bleibt offen: *Lässt sich jede beschränkte Teilmenge E des Raumes R^n in $(n+1)$ Mengen zerlegen, von denen jede einen kleineren Durchmesser als E hat?*

*) Herr H. Hopf hat mich in fremdlicher Weise aufmerksam gemacht, dass der Satz III befindet sich auch in der in russischer Sprache erschienenen Abhandlung von Herren L. Lusternik u. L. Schnierelmann „Méthodes topologiques dans les problémes variationnels", Issledowatelskij Institut Matematiki i Mechaniki pri I M. G. U., Moskau 1930, S. 26, Hilfssatz 1. Der Beweis von Herren L. Lusternik u. L. Schnielermann unterscheidet sich übrigens wesentlich von dem meinen.

Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

M. P. Alexandroff a démontré [2]) qu'étant donné, dans un espace compact $\mathfrak{X}$, un système γ d'ensembles fermés $A_0, \ldots, A_n$ tels que

$$(1) \qquad \mathfrak{X} = A_0 + \ldots + A_n$$

et η désignant un nombre supérieur aux diamètres [3]) $\delta(A_i)$ des ensembles A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, on peut transformer l'espace $\mathfrak{X}$ en un sous-ensemble du nerf du système γ à l'aide d'une fonction continue $y = f(x)$ de manière qu'on ait, pour chaque y, l'inégalité $\delta[f^{-1}(y)] < \eta$.

Rappelons que le „nerf" du système γ est, par définition, le complexe (géométrique) composé de tous les simplexes $i_0 \ldots i_k$ tels que $A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_k} \neq 0$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Pour fixer les idées, nous imaginons les chiffres $0, \ldots, n$ (par lesquels les sommets du complexe sont désignés) comme sommets d'un simplexe S à n dimensions [4]).

Je vais démontrer dans cette note le théorème précédent d'une façon qui parait être plus directe et bien simple, en généralisant, d'ailleurs, un peu et en précisant le théorème même.

[1]) Présenté à la Soc. Pol. de Math. le 7. I. 1933 à Lwów.

[2]) Comptes rendus 183 (1926), p. 640, Math. Ann. 98 (1928), p. 635, Ann. of Math. 30 (1928), p. 6.

[3]) diamètre d'un ensemble = borne supérieure des distances mutuelles de ses points.

[4]) Tous les simplexes dont il sera question dans cette note auront pour sommets des chiffres $\leqslant n$; ce seront donc des „faces k-dimensionnelles" $(-1 \leqslant k \leqslant n)$ de S. Un simplexe sera toujours conçu comme *simplexe ouvert* (sans bord).

Je vais admettre que les ensembles A_i du système γ sont **ouverts** (au lieu d'être fermés), cette hypothèse étant plus commode dans le raisonnement; d'ailleurs, le cas d'ensembles fermés se ramène à celui-ci, car chaque système d'ensembles fermés peut être renfermé dans un système d'ensembles ouverts ayant le même nerf, en altérant les diamètres des ensembles aussi peu que l'on veut [1]).

Théorème. *Etant donnée, par la formule* (1), *une décomposition d'un espace métrique* [2]) $\mathcal{X}$ *en sous-ensembles ouverts, il existe une fonction continue* $y=f(x)$ *qui transforme cet espace en un sous-ensemble de la fermeture* $\bar{S}$ *du simplexe* $S=0\dots n$ *de façon que, quel que soit le simplexe* $i_0\dots i_k$, *on ait:*

$$f^{-1}(i_0\dots i_k)=A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}-\sum_{i\neq i_j}A_i \tag{2}$$

(la sommation est étendue à tous les indices i qui n'appartiennent pas au système $i_0,\dots,i_k$).

Démonstration. Posons $F_i=\mathcal{X}-A_i$. On désigne par $\varrho(a,F)$, pour F fermé et non-vide, la borne inférieure des distances du point a à un point x qui parcourt l'ensemble F; pour $F=0$, convenons que $\varrho(a,F)=1$ (ou une constante arbitraire $\neq 0$). Par conséquent, l'égalité $\varrho(a,F_i)=0$ veut dire que a appartient à F_i; ou encore: que a n'appartient pas à A_i.

Nous définissons la fonction $f(x)$ comme suit: $f(x)$ est le point situé dans $\bar{S}$ et ayant la i-ème coordonnée barycentrique $f_i(x)$, $0\leqslant i\leqslant n$, donnée par la formule:

$$f_i(x)=\frac{\varrho(x,F_i)}{\varrho(x,F_0)+\dots+\varrho(x,F_n)}.$$

La fonction $f_i(x)$ est ainsi définie pour chaque x, car le dénominateur ne pourrait s'annuler que si tous ses sommandes s'annulaient, mais alors — comme nous venons de voir — x n'appartiendrait à aucun des ensembles $A_0,\dots,A_n$, contrairement à l'égalité (1). Comme, en outre, on a: $f_i(x)+\dots+f_n(x)=1$, il a été légitime

[1]) Cf. W. Hurewicz, Math. Ann. 100 (1928).

[2]) *le plus général*; nous ne faisons ni l'hypothèse de compacticité ni même de la séparabilité de cet espace.

d'admettre les nombres $f_i(x)$ comme coordonnées barycentriques du point $f(x)$.

La fonction $\varrho(x,F)$ étant, pour F fixe, continue, la fonction $f(x)$ l'est également. Reste à démontrer l'égalité (2).

Or, p étant un point arbitraire de $\bar{S}$ et $p_0,\dots,p_n$ désignant ses coordonnées barycentriques, la condition suffisante et nécessaire pour que p appartienne au simplexe (ouvert!) $i_0\dots i_k$ est que l'on ait: $p_{i_j}\neq 0$ pour $0\leqslant j\leqslant k$ et $p_i=0$ pour $i\neq i_j$. Par conséquent, l'hypothèse que $f(x)$ appartient au simplexe $i_0\dots i_k$ veut dire que: $f_{i_j}(x)\neq 0$ et $f_i(x)=0$, c. à d. que: $\varrho(x,F_{i_j})\neq 0$ et $\varrho(x,F_i)=0$, donc que x appartient à A_{i_j} et n'appartient pas à A_i, en symboles: que x appartient à

$$A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}-\sum_{i\neq i_j}A_i.$$

L'égalité (2) et parsuite le théorème se trouvent ainsi démontrés.

Conclusions et remarques.

1) *Le point $f(x)$ appartient, pour chaque x, au nerf du système* $A_0,\dots,A_n$. Autrement dit, si $f(x)$ appartient au simplexe $i_0,\dots,i_k$, on a $A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}\neq 0$. Cela résulte directement du fait que l'égalité $A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}=0$ implique en vertu de (2) que $f^{-1}(i_0\dots i_k)=0$, donc qu'aucune valeur de la fonction $f(x)$ n'appartient à $i_0\dots i_k$.

2) *Le diamètre de l'ensemble $f^{-1}(y)$ ne dépasse, pour aucun y, le diamètre du plus grand des ensembles A_i.* Soit, en effet, y un point du simplexe $i_0\dots i_k$; il vient

$$\delta[f^{-1}(y)]\leqslant\delta[f^{-1}(i_0\dots i_k)]\leqslant\delta(A_{i_0}).$$

3) Si l'ensemble Y des valeurs de la fonction $f(x)$ est *fermé* (ce qui a lieu dans le cas où $\mathcal{X}$ est compact), on peut, en appliquant le „Ausfegungsverfahren" dont se sert M. Alexandroff dans sa démonstration (l. cit.), le transformer en un *sous-complexe du nerf* du système γ. Notamment, $i_0\dots i_k$ étant un simplexe „saturé" (c. à d. de dimension la plus grande possible) par rapport à l'inégalité

$$Y\cdot(i_0\dots i_k)\neq 0\neq(i_0\dots i_k)-Y,$$

on projette le premier des ensembles de cette formule d'un point fixe appartenant au deuxième sur le bord (fermé) du simplexe. On applique ensuite le même procédé à l'ensemble Y, ainsi transformé, et ainsi de suite. On aboutit après un nombre fini de fois à un complexe K, qui s'obtient donc de Y par une transformation continue; désignons la par $g(y)$.

On voit aussitôt que, durant cette transformation, aucun point n'a quitté la fermeture du simplexe auquel il appartenait. Par conséquent, si $g(y)$ appartient au simplexe $i_0 \dots i_k$, le point y appartient, soit à ce simplexe, soit à un simplexe qui le contient dans son bord, donc, en tout cas, à un simplexe qui, parmi ses sommets contient les sommets $i_0, \dots, i_k$. En posant $y=f(x)$, on en conclut en raison de (2), que x appartient au produit $A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}$ et, en désignant par $h(x)$ la fonction superposée $gf(x)$, il vient:

$$h^{-1}(i_0 \dots i_k) \subset A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}. \tag{3}$$

La propriété de la fonction f énoncée dans la remarque 2) appartient donc aussi à la fonction h.

4) En cas où l'ensemble Y *est arbitraire, fermé ou non*, on arrive à la même conclusion, en modifiant le procédé de „balayage" employé tout-à-l'heure.

Analysons, à ce but, de plus près la projection centrale de $\overline{S}$ sur le bord de S effectuée d'un point fixe $c \in \overline{S}$. Par definition, le point x est projetté sur le point $p(x)$, qui est l'extrémité du plus grand intervalle $[c, p(x)]$ contenant x et contenu dans $\overline{S}$. La fonction $p(x)$ est continue en chaque point x, excepté le point c. Désignons par C le simplexe qui contient c (c'est une face k-dimensionnelle de S, $0 \leqslant k \leqslant n$). Divisons les simplexes en deux classes, suivant que c appartient à leur fermeture ou non.

Si T est un simplexe de la I-re classe, on a: $T\cdot p(\overline{S})=0$.

Si T appartient à la II-me classe, on a $p(x)=x$ pour $x \in \overline{T}$. En outre, les intervalles (ouverts) cx, où $x \in T$, forment une partie du simplexe U qui a pour sommets ceux de T et ceux de C. Par conséquent:

$$p^{-1}(T) \subset T+U. \tag{4}$$

Considérons, à présent, un sous-ensemble Y de $\overline{S}$ qui ne contient pas le point c. Nous dirons qu'un simplexe T est „incomplet relativement à Y", si l'on a

$$TY \neq 0 \neq \overline{T}-Y. \tag{5}$$

Désignons encore par r le maximum des dimensions des simplexes incomplets rel. à Y. Nous allons démontrer que, T étant un simplexe de dimension $\geqslant r$ incomplet rel. à $p(Y)$, il l'est aussi rel. à Y.

En effet, l'hypothèse que $T\cdot p(Y)\neq 0$ implique d'abord que T est un simplexe de II-me classe. Considérons le simplexe U de la formule (4): par définition c'est un simplexe de dimension supérieure à T, donc à r, et en outre: $c \in \overline{U}$. Comme U est complet rel. à Y et $c \in \overline{U}-Y$, il vient $UY=0$, d'où, en vertu de (4): $Y\cdot p^{-1}(T) \subset YT$, donc $p[Y\cdot p^{-1}(T)] \subset p(YT)$. Or, d'après une formule générale, on a $p[Y\cdot p^{-1}(T)]=T\cdot p(Y)$ et, d'autre part, comme $p(x)=x$ pour chaque $x \in T$, il vient $p(YT)=YT$. Par conséquent, l'ensemble $T\cdot p(Y)$, qui est par hypothèse non-vide, est contenu dans YT.

On a ainsi $TY\neq 0$. Pour prouver la deuxième des inégalités (5), on tient compte du fait que, pour $x \in \overline{T}$, on a $p(x)=x$. Il vient:

$$0 \neq \overline{T}-p(Y)=p(\overline{T})-p(Y) \subset p(\overline{T}-Y)=\overline{T}-Y.$$

Il est ainsi établi que T est incomplet rel. à Y.

Il résulte de là que, parmi les simplexes de dimension $\leqslant r$, le nombre des simplexes incomplets rel. à $p(Y)$ ne dépasse celui des simplexes incomplets rel. à Y. Il est même **inférieur**, si l'on suppose que le point c a été choisi de la fermeture d'un simplexe T incomplet rel. à Y et de dimension r (car alors T, comme disjoint de $p(\overline{S})$ est complet rel. à $p(Y)$).

On voit ainsi qu'en appliquant l'opération $p(x)$ un nombre fini de fois, le point c étant chaque fois convenablement choisi, on parvient finalement à un ensemble K relativement auquel chaque simplexe T est complet. K est donc bien un complexe fermé, — comme au N 3). Le reste du raisonnement du N précédent, en particulier l'inclusion (3), est encore applicable.

5) Etant donné un système arbitraire d'ensembles fermés non-vides $F_0, \dots, F_n$ tels que $F_0\cdot\ldots\cdot F_n=0$ la fonction $f(x)$, définie comme dans la démonstration du théorème, transforme l'espace en une partie du bord du simplexe n-dimensionnel de façon que l'image

de F_i se trouve située sur la i-ème face ($n-1$-dimensionnelle) du simplexe [1]).

6) Le membre droit de l'égalité (2) est nommé par G. Boole (en Algèbre de la Logique) „*constituant* de l'univers du discours $\mathfrak{D}$ relatif au système $A_0, \ldots, A_n$". A chaque constituant correspond évidemment de façon biunivoque un système d'indices $i_0, \ldots, i_k$ (qui peut d'ailleurs être vide). Le théorème permet d'interpréter *géométriquement* cette correspondance: le système d'indices étant considéré comme simplexe géométrique, la correspondance représente une fonction *continue* satisfaisant à la formule (2) ou, ce qui est équivalent, les simplexes étant disjoints, à l'inclusion

$$f(A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_k} - \sum_{i \neq i_j} A_i) \subset i_0 \ldots i_k. \tag{6}$$

L'hypothèse que l'égalité (1) a lieu, c. à d. que le constituant égal au produit des complémentaires des ensembles A_i est vide — est essentielle, puisqu'à ce constituant correspond le simplexe vide.

7) Nous avons supposé jusqu'à présent que les chiffres $0, \ldots, n$ désignent les sommets d'un simplexe n-dimensionel non-singulier, c. à d. qu'ils ne sont pas situés dans un espace euclidien à $n-1$ dimensions. Si l'on ne fait pas cette restriction, c. à d. *si* $0 \ldots n$ *est un simplexe arbitraire singulier ou non, le théorème reste encore vrai, lorsque l'égalité* (2) *est remplacée par l'inclusion* (6) (cela est indispensable puisque les simplexes ne sont plus nécessairement disjoints). Pour s'en convaincre on répète presque textuellement la démonstration du théorème (on peut aussi, en s'appuyant sur le théorème, appliquer une transformation simpliciale du simplexe ordinaire en le simplexe singulier en question).

[1]) C'est une transformation „duale" à celle du système γ. Elle intervient dans la démonstration du théor. de M. Hurewicz sur le „plongement" d'espaces arbitraires dans des espaces compacts de même dimension. Cf. Mon. f. Math. u. Ph. 37 (1930), p. 202.

On Continuous Curves Irreducible about Subsets.

By

Leo Zippin [1]) (Princeton)

Some years ago, confining himself to the plane and using arguments valid there only, Gehman proved the following theorem: If C is a compact (plane) continuous curve and H a closed subset, then in order that C shall contain an acyclic continuous curve containing H it is necessary and sufficient that H have the following structure: 1) the components of H are acyclic continuous curves or points, 2) not more than a finite number of these components exceed in diameter a preassigned positive number. We have had occasion to require analogous theorems in special applications where the curve C was of rather arbitrary nature but the point set H, on the contrary, sharply delimited: for example, totally disconnected or, again, what we have called a Moore-Kline set. More recently Whyburn has needed a complete extension of this theorem free of the restriction that C be planar. We communicated to him that the result held and inasmuch as he has since used it, crediting it to us [2]), it is proper that a proof now be given. We shall approach a more general problem, which we solve only in part, but whose partial solution includes as very special case the desired extension. This part solution appears to us to include the most likely applications of our „projected" theorem (see I, under section 1). None the less the problem is fairly fundamental in the field of continuous curves and seems to call for a definite answer.

Preliminary: We shall make the definition that a continuous curve C is *irreducible* about a self-compact subset H provided no

[1]) National Research Fellow.

[2]) „*Decomposability*...", Am. Journ. of Math., vol. 54 (1932), p. 173 (footnote).