Démonstration. Tout espace métrique indénombrable et compact contenant une image homéomorphe de N, on peut se borner au cas $Y = N$.

Soit $y_k^{(n)}$ une suite double de nombres appartenant à N, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° si $m_1 < m_2$ ou bien si $m_1 = m_2$ et $k_1 < k_2$, on a $y_{k_1}^{(m_1)} > y_{k_2}^{(m_2)}$;
2° $\lim\limits_{k=\infty} y_k^{(n)} = y_1^{(n+1)}$.

Désignons par D l'ensemble des points $y_1^{(n)}$ et par $N_k^{(m)}$ l'ensemble des nombres irrationnels compris entre $y_k^{(m)}$ et $y_{k+1}^{(m)}$. $N_k^{(m)}$ étant homéomorphe à N, soit $\varphi_k^{(m)}(t)$ une fonction biunivoque et bicontinue telle que $\varphi_k^{(m)}(N_k^{(m)}) = N$.

La fonction $f(t)$ où $t \epsilon N$, définie par l'égalité

$$f\left(\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots\right) = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_3} + \frac{1|}{|n_5} + \ldots \text{ [17]}$$

est continue sur N, on a $f(N) = N$, et pour tout $y \epsilon N$ l'ensemble $f^{-1}(y)$ est condensé.

Soit $E \subset X$ un complémentaire analytique donné et $g(y)$ une fonction continue, définie sur N, telle que $g(N) = X - E$.

Posons pour tout $y \epsilon N_k^{(m)}$:

$$\psi_k^{(m)}(y) = g\{f[\varphi_k^{(m)}(y)]\}$$

et désignons par $H_k^{(m)}$ l'image de la fonction $\psi_k^{(m)}(y)$, c. à d. l'ensemble de touts les points (x, y), tels que $x = \psi_k^{(m)}(y)$.

On voit aisément que l'ensemble

$$H = (X \times D) + \sum_{\substack{m=1 \\ k=1}}^{\infty} H_k^{(m)}$$

est un G_δ, et que $\Delta(H, \xi)$ est pour tout $\xi \epsilon X - E$ un ensemble condensé, tandis qu'il est isolé, exactement dénombrable pour tout $\xi \epsilon E$, d'où les relations qu'il fallait démontrer.

Les théorèmes 2—4 et 6—8 donnent le

Théorème 9. *On a:* $\Phi(\mathbf{B}, \mathbf{U}') = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{U}') = \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}) = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{D}) = \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}_1') = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{D}_1') = \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}_n) = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{D}_n) =$ *classe des complémentaires analytiques (contenus dans X).*

[17]) Cf. la note précitée de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński [1]), p. 162.

Sur la superposition des fonctions de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. N. Lusin a posé le problème suivant [1]):

Une fonction de classe 3 de Baire est-elle toujours une superposition de trois fonctions de classe 1? En autres termes, existe-t-il pour toute fonction $f(x)$ de classe 3 trois fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$ de classe 1, telles qu'on ait pour tout x réel

$$f(x) = \varphi(\psi(\vartheta(x)))?$$

Dans cet ordre d'idées nous démontrerons ici le théorème suivant:

Théorème: *Il existe un ensemble linéaire E et une fonction $\varphi(x)$ définie dans E et de première classe dans E, telle que, quelle que soit la fonction $f(x)$ d'une variable réelle de classe 3, il existe une fonction d'une variable réelle $\vartheta(x)$ de classe 1, dont les valeurs, ainsi que celles de la fonction $\varphi(\vartheta(x))$, appartiennent à E, et telle que pour tout x réel on a*

$$f(x) = \varphi(\varphi(\vartheta(x))). \tag{1}$$

Lemme. *Il existe un ensemble linéaire E et une fonction $\varphi(x)$ définie dans E et de classe 1 dans E, telle que pour toute fonction d'une variable réelle $f(x)$ de classe ν, où ν est un nombre naturel > 1, il existe une fonction d'une variable réelle $\psi(x)$ de classe $\nu - 1$, dont les valeurs appartiennent à E et telle que pour tout x réel*

$$f(x) = \varphi(\psi(x)). \tag{2}$$

[1]) *Fund. Math.*, t. V (1924), p. 337.

Démonstration. L'ensemble de tous les nombres réels étant homéomorphe à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$, il suffira évidemment de démontrer notre lemme pour le cas, où la fonction $f(x)$ est définie seulement dans l'intervalle $0<x<1$ et ne prend que des valeurs appartenant à cet intervalle.

Posons, pour x réels, $n=1, 2, \ldots$:

$$a_n(x) = \mathrm{E}\, 2^n x - 2\,\mathrm{E}\, 2^{n-1} x, \tag{3}$$

où $\mathrm{E}t$ désigne l'entier le plus grand ne dépassant pas t. On voit sans peine que les fonctions (3) ne prennent que les valeurs 0 et 1, et que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n}, \quad \text{pour} \quad 0<x<1. \tag{4}$$

Les fonctions (3) sont évidemment toutes continues dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$.

Posons, pour $0<x<1$, $n=1, 2, 3, \ldots$:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{(2k-1)2^n}(x)}{2^k}. \tag{5}$$

Les fonctions (5) sont toutes continues dans N (en tant que sommes des séries uniformément convergentes des fonctions continues dans N).

Désignons par E l'ensemble de tous les nombres x de N, pour lesquels la suite infinie

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \ldots$$

converge [1]) et posons

$$\varphi(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in E. \tag{6}$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie dans $0<x<1$ de classe ν de Baire, où ν est un nombre naturel >1, telle que $0<f(x)<1$ pour $0<x<1$. On a donc pour $0<x<1$:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x), \tag{7}$$

où $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ sont des fonctions de classe $\nu-1$ (dans l'intervalle $0<x<1$), et nous pouvons supposer que les valeurs des fonctions $f_n(x)$ appartiennent toutes à l'ensemble N.

[1]) On pourrait démontrer sans peine que l'ensemble E est un $F_{\sigma\delta}$: cf. *Fund. Math.* t. II, p. 141.

En effet, $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ sont des fonctions de classe $\alpha=\nu-1 \geqslant 1$ et, comme j'ai démontré [1]), dans ce cas, ε étant un nombre positif donné, p. e. $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{n}$, il existe toujours une fonction de classe $\leqslant \alpha$, soit $g_n(x)$, qui ne prend que les valeurs multiples de ε et qui est égale à $f(x)$ à moins de ε près. On aura évidemment, d'après (7):

$$f(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x)$$

et les valeurs des fonctions $g_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ appartiennent à N.

Posons, pour $0<x<1$:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(f_n(x))}{2^{(2k-1)2^n}} \tag{8}$$

— ce sera une fonction de classe $\leqslant \nu-1$, en tant que somme d'une série uniformément convergente de fonctions de classe $\leqslant \nu-1$ ($a_n(x)$ étant continues dans N et $f_n(x)$ étant des fonctions de classe $\nu-1$ dont les valeurs appartiennent à N).

Je dis que pour $0<x<1$ et pour k et n naturels:

$$a_{(2k-1)2^n}(\psi(x)) = a_k(f_n(x)). \tag{9}$$

Cela résulte tout de suite du fait que tout nombre irrationnel donne un développement unique en fraction dyadique infinie et que (8) est un tel développement du nombre $\psi(x)$ (les fonctions (3) ne prenant que deux valeurs 0 et 1) et d'autre part, d'après (4), on a

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(\psi(x))}{2^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{(2k-1)2^n}(\psi(x))}{2^{(2k-1)2^n}}$$

(puisque, d'après (8), $0<\psi(x)<1$).

D'après (9), (5) et (4) on trouve tout de suite pour $0<x<1$, $n=1, 2, 3, \ldots$:

$$\varphi_n(\psi(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{(2k-1)2^n}(\psi(x))}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(f_n(x))}{2^k} = f_n(x). \tag{10}$$

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 4.

D'après (10) et (7) on a donc

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(\psi(x)) = f(x), \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1. \tag{11}$$

La suite infinie $\varphi_n(\psi(x))$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant ainsi convergente pour $0 < x < 1$, on conclut, d'après la définition de l'ensemble E, que $\psi(x) \epsilon E$ pour $0 < x < 1$.

D'après (11) et (6) on trouve enfin la formule (2).

$\psi(x)$ est une fonction de classe $\leqslant \nu - 1$ (dans l'intervalle $0 < x < 1$) dont les valeurs appartiennent à E et $\varphi(x)$ est, d'après (6), une fonction de classe $\leqslant 1$ sur E (les fonctions $\varphi_n(x)$ étant continues sur E). Or, $f(x)$ est une fonction de classe ν (dans l'intervalle $0 < x < 1$). On en conclut tout de suite de (2) que $\varphi(x)$ ne peut être de classe < 1 sur E et que $\psi(x)$ ne peut être de classe $< \nu - 1$ dans l'intervalle $0 < x < 1$. La fonction $\varphi(x)$ est donc précisément de classe 1 sur E et la fonction $\psi(x)$ précisément de classe $\nu - 1$ dans l'intervalle $0 < x < 1$.

Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction d'une variable réelle de classe 3. D'après notre lemme, on a donc la formule (2), où $\psi(x)$ est une fonction de classe 2, dont les valeurs appartiennent à l'ensemble E. En appliquant notre lemme (pour $\nu = 2$) à la fonction $\psi(x)$, nous aurons

$$\psi(x) = \varphi(\vartheta(x)), \tag{12}$$

où $\vartheta(x)$ est une fonction d'une variable réelle de classe 1 dont les valeurs appartiennent à E.

D'après (2) et (12) on a la formule (1) et notre théorème est démontré.

Un théorème analogue subsiste, comme on voit sans peine, pour les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle d'une classe finie quelconque.

Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre [1]).

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es seien M und N zwei metrische Räume, von denen mindestens einer kompakt ist. N^M bezeichnet den Raum, der als Elemente alle stetige Abbildungen φ von M in [2]) N hat und der durch die Formel $\varrho(\varphi, \varphi') = \operatorname{Sup}_{x \epsilon M} \varrho[\varphi(x), \varphi'(x)]$ [3]) metrisiert ist. Je zwei, zu einer Komponente [4]) der Menge $Z \subset N^M$ gehörende Funktionen werden *äquivalent in* Z genannt. Eine Abbildung $\varphi \epsilon N^M$ heisst *wesentlich* [5]), wenn jede mit φ in N^M äquivalente Abbildung M auf [2]) N abbildet.

Mit S_n werde ich die euklidische n-dimensionale Sphäre, d. h. die Oberfläche einer Vollkugel im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raume R^{n+1} bezeichnen. Ist p ein beliebiger Punkt der Sphäre S_n, so bezeichnet p^* den zu p *antipodischen*, d. h. symetrisch zu p rel. zum Mittelpunkte von S_n gelegenen Punkt von S_n. Eine Funktion $f \epsilon S_n^{S_n}$ wird *antipodentreu* genannt, wenn $f(p^*) = [f(p)]^*$ für jedes $p \epsilon S_n$ gilt.

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meinem Sektionsvortrage auf dem Internationalen Math. Kongresse, Zürich 1932, vorgebracht worden.

[2]) φ bildet M *in* N ab, wenn $\varphi(M) \subset N$ ist; φ bildet M *auf* N ab, wenn $\varphi(M) = N$ ist. Vgl. z. B. H. Hopf, Math. Ann. 102, S. 572, Fussnote 14.

[3]) $\varrho(x, y)$ (bzw. $\varrho(A, B)$) bezeichnet, wie üblich, die Entfernung zwischen den Punkten x und y (bzw. Teilmengen A und B) eines metrischen Raumes.

[4]) Eine Komponente von Z ist eine grösste (in keiner von sich selbst Verschiedenen enthaltene) zusammenhängende Teilmenge von Z.

[5]) Vgl. H. Hopf, Moskauer Math. Sammlung 1930, S. 53.