Quelques théorèmes sur les cribles boreliens.

Par

S. Braun (Varsovie).

Une conséquence du théorème de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński [1]) est que les ensembles linéaires non-vides et au plus dénombrables „criblés" par un ensemble E plan *analytique* quelconque donnent toujours un ensemble A_ϱ (différence de deux ensembles analytiques) et que tout ensemble A_ϱ peut être obtenu de cette façon [2]).

Le but principal de cette Note est de prouver que dans le cas où les ensembles plans E sont *boreliens*, la classe des ensembles qu'on obtient par cette opération coïncide exactement avec celle des ensembles CA (complémentaires analytiques).

Ce théorème trouve quelques applications; nous mentionnons ici la suivante:

M. Lusin a démontré que E étant un ensemble borelien et $f(x)$ une fonction continue (ou, plus généralement, une fonction représentable analytiquement), définie sur E et telle que $f^{-1}(y)$ est toujours au plus dénombrable — $f(E)$ est de même borelien.

Or, la prémisse que les ensembles $f^{-1}(y)$ sont *au plus dénombrables* peut être remplacée par une prémisse moins forte: il suffit notamment de supposer que ces ensembles sont (pour tout $y \in f(E)$) *non-condensés* (cf. le théorème 5).

[1]) Voir S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński: *Sur un problème concernant les fonctions continues*, Fund. Math. **6** (1924), pp. 161—169 et S. Saks: *On the functions of Besikovitch in the space of continuous functions*, Fund. Math. **19** (1932), pp. 211—219, en particulier p. 218.

[2]) Cf. W. Sierpiński: *Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points*, Mathematica (Cluj) **5** (1931) pp. 49—58, en particulier p. 51.

1. Notations. Remarques préliminaires. Nous considérons deux espaces métriques X et Y (que nous appellons les axes de coordonnées) et leur produit combinatoire $X \times Y$. Nous supposons X complet et séparable et Y compact, donc aussi séparable, et contenant par conséquent une suite d'ensembles ouverts „rationnels" $\{V_n\}$ (p. ex. des sphères ouvertes de rayons rationnels et de centres formant un ensemble dénombrable, dense dans Y).

Posons pour tout ensemble $E \subset X \times Y$ et tout $\xi \in X$:

$$\Delta(E, \xi) = \underset{\eta}{\mathrm{E}}[(\xi, \eta) \in E].$$

Il est à remarquer qu'on a pour tout ensemble $E \subset X \times Y$, tout ensemble $H \subset Y$ et tout $\xi \in X$:

$$(1) \qquad \Delta[(X \times H) \cdot E, \ \xi] = H \cdot \Delta(E, \xi)$$

$\mathbf{K}$ étant une classe quelconque de sous-ensembles de Y et E un sous-ensemble de $X \times Y$, posons

$$\Gamma(E, \mathbf{K}) = \underset{\xi}{\mathrm{E}}[\Delta(E, \xi) \in \mathbf{K}].$$

(En d'autres mots: la classe $\mathbf{K}$, „criblée" par E, donne $\Gamma(E, \mathbf{K})$).

$\mathbf{L}$ étant une classe arbitraire de sous-ensembles de $X \times Y$, nous désignons par $\Phi(\mathbf{L}, \mathbf{K})$ la classe de tous les $\Gamma(E, \mathbf{K})$, où $E \in \mathbf{L}$.

Nous désignons par

I — l'intervalle fermé $[0, 1]$;

N — l'ensemble des nombres irrationnels contenus dans I;

$\mathbf{B}$ — la classe des sous-ensembles boreliens de $X \times Y$;

$\mathbf{G}_\delta$ — la classe des sous-ensembles G_δ de $X \times Y$;

$\mathbf{M}$ — la classe des sous-ensembles indénombrables de Y;

$\mathbf{D}$ — la classe des sous-ensembles exactement dénombrables de Y;

$\mathbf{D}_n$ — la classe des sous-ensembles au plus dénombrables de Y, contenant au moins n éléments;

$\mathbf{U}$ — la classe des sous-ensembles de Y, contenant un seul élément.

$\mathbf{K}$ étant une classe quelconque de sous-ensembles de Y, nous désignerons par $\mathbf{K}'$ la classe des ensembles E tels que l'on ait $EV_n \in \mathbf{K}$ au moins pour une valeur de n. Par conséquent:

$\mathbf{U}'$ est la classe des sous-ensembles de Y, non-„denses en soi" (c. à d. qui contiennent des points isolés);

D_1^l est la classe des sous ensembles de Y, non-„condensés".

$f(x)$ étant une fonction définie sur un ensemble E et Z un ensemble contenu dans E, nous désignons par $f(Z)$ l'ensemble des points $f(x)$, où $x \in Z$, et par $f^{-1}(y)$ l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x)=y]$.

Nous aurons à nous servir dans la suite de l'ainsi dit „*théorème sur la projection de l'ensemble d'unicité*" qui a été établit par M. Lusin pour le cas $X = Y = N$[3]). Or, il est à rémarquer que ce théorème se laisse démontrer sans en altérer d'une façon essentielle le raisonnement, pour le cas où X et Y sont des espaces arbitraires métriques, séparables et complets. Tout sous-ensemble borelien d'un tel espace étant, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points, une image continue et biunivoque de N[4]), la démonstration se réduit (tout comme chez M. Lusin, l. c. pp. 256—7) à montrer que pour toute fonction $f(t)$ continue sur N et telle que $f(N) \subset X$, l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels l'équation $x = f(t)$ admet une racine unique — est un complémentaire analytique. Pour l'établir on a qu'à remplacer les intervalles Δ_j de M. Lusin par les fermetures des ensembles e_j[5]).

Il est à noter que l'ainsi dit II-ème principe de M. Lusin qui intervient, dans ce raisonnement se laisse à son tour démontrer pour un espace quelconque métrique séparable et complet, tout comme M. Kuratowski[6]) l'a fait (pour l'intervalle I) à l'aide du théorème de M. Lusin sur les cribles F_σ, ce dernier théorème étant également vrai pour X métrique, séparable et complet[7]).

2. ***Théorème 1.*** *K étant une classe quelconque de sous-ensembles de Y, on a*

$$\Phi(\mathsf{B}, \mathsf{K}^l) \subset [\Phi(\mathsf{B}, \mathsf{K})]_\sigma.$$

Démonstration. Soit $E \in \Phi(\mathsf{B}, \mathsf{K}^l)$. Il existe donc un ensemble $B \in \mathsf{B}$ tel que

$$E = \Gamma(B, \mathsf{K}^l). \tag{2}$$

Posons $W_n = X \times V_n$. Les ensembles BW_n étant boreliens il suffit de démontrer que

$$\Gamma(B, \mathsf{K}^l) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(BW_n, \mathsf{K}). \tag{3}$$

[3]) N. Lusin: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.* Collection Borel, Paris 1930, pp. 255—259.

[4]) Comparer p. ex. H. Hahn: *Reelle Funktionen I*, Leipzig 1932, p. 375.

[5]) l. c., p. 257.

[6]) *Evaluation de la classe borelienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. **17** (1931), pp. 249—272, en particulier p. 268.

[7]) Comparer p. ex. Hahn, l. c., p. 394.

Or, la relation

$$\xi \in \Gamma(B, \mathsf{K}^l) \tag{4}$$

est équivalente à $\Delta(B, \xi) \in \mathsf{K}^l$. En d'autres mots, il existe un n naturel tel que $\Delta(B, \xi) \cdot W_n \in \mathsf{K}$, c. à d. d'après (1) $\Delta(BW_n, \xi) \in \mathsf{K}$, ce qui équivaut la rélation

$$\xi \in \Gamma(BW_n, \mathsf{K}). \tag{5}$$

Par conséquent la relation (5) pour un certain n naturel est équivalente à la relation (4), ce qui démontre l'égalité (3).

3. D'après le théorème de M. Lusin „sur la projection de l'ensemble d'unicité"[8]) les ensembles de la classe $\Phi(\mathsf{B}, \mathsf{U})$ sont des complémentaires analytiques. Il en résulte donc, en vertu du théorème 1, le

Théorème 2. *Les ensembles de la classe $\Phi(\mathsf{B}, \mathsf{U}^l)$ sont des complémentaires analytiques*[9]).

Ceci établi, nous allons démontrer le

Théorème 3. *Les ensembles de la classe $\Phi(\mathsf{B}, \mathsf{D}_1)$ sont des complémentaires analytiques.*

Démonstration. D'abord nous allons démontrer, que, en particulier,

(6) *les ensembles de la classe $\Phi(\mathsf{G}_\delta, \mathsf{D}_1)$ sont des complémentaires analytiques.*

Soit $E \in \Phi(\mathsf{G}_\delta, \mathsf{D}_1)$. Il existe donc un ensemble $H \in \mathsf{G}_\delta$ tel que

$$E = \Gamma(H, \mathsf{D}_1).$$

Pour tout point $\xi \in X$ l'ensemble $\Delta(H, \xi)$ est un G_δ dans Y; par conséquent, s'il est au plus dénombrable et non vide, alors il contient un point isolé. On a donc

$$\Gamma(H, \mathsf{D}_1) = \Gamma(H, \mathsf{U}^l) - \Gamma(H, \mathsf{M}).$$

$\Gamma(H, \mathsf{M})$ étant, d'après le théorème précité de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński[10]), un ensemble analytique, $\Gamma(H, \mathsf{D}_1)$ est, en vertu du théorème 2, un complémentaire analytique.

[8]) Cf. nos Remarques préliminaires, p. 168.

[9]) Cf. la note précitée de M. Sierpiński[2]), pp. 53 et 54.

[10]) Cf. [1]).

La relation (6) étant ainsi établie, considérons d'une façon générale un ensemble *borelien* quelconque $B \subset X \times Y$[11]. Il existe donc[12] une fonction continue et biunivoque $f(z)$, définie sur un ensemble $J \subset I$ qui est un G_δ et telle que $f(J) = B$. Désignons par B^0 l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace $X \times Y \times I$ tels que $z \in J$ et $(x, y) = f(z)$ — c.-à-d. l'„image" de la fonction $f(z)$. B^0 est évidemment un G_δ dans $X \times Y \times I$.

La fonction $f(z)$ étant biunivoque, l'ensemble des points (ξ, y, z) de B^0 pour un ξ fixe $\in X$ est de la même puissance que l'ensemble des points (ξ, y) de B. Par conséquent $\Gamma(B, \mathbf{D}_1)$ coïncide avec l'ensemble des ξ tels que les points (ξ, y, z) de B^0 forment un ensemble non-vide et au plus dénombrable.

B^0 étant un G_δ, il en résulte donc d'après (6) (si l'on considére l'espace $Y \times I$ au lieu de Y) que $\Gamma(B, \mathbf{D}_1)$ est un complémentaire analytique, c. q. f. d.

4. Remarquons qu'une seconde application du théorème 1 entraîne — en vertu du théorème 3 — les deux théorèmes suivants[13]:

Théorème 4. *Les ensembles de la classe $\Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}_1')$ sont des complémentaires analytiques,*

d'où le

Théorème 5. *La projection P sur l'axe X d'un ensemble borelien quelconque $B \subset X \times Y$ tel que l'on a $\Delta(B, \xi) \in \mathbf{D}_1'$ pour tout $\xi \in P$, est elle-même un ensemble borelien*[14].

En effet, P coïncide alors avec $\Gamma(B, \mathbf{D}_1')$; il est par conséquent un complémentaire analytique. Comme ensemble à la fois analytique et complémentaire analytique, P est donc un ensemble borelien[15].

5. Selon une remarque de M. Sierpiński un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 1 conduit aux théorèmes suivants:

[11]) Cette partie de la démonstration est due à M. Sierpiński.

[12]) Cf. p. ex. F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1927, p. 211.

[13]) Cette remarque est due à M. Szpilrajn.

[14]) C'est une généralisation d'un théorème analogue de M. Lusin (l. c. p. 178) établi dans l'hypothèse que $\Delta(B, \xi) \in \mathbf{D}_1$ pour tout $\xi \in P$.

[15]) En vertu du théorème bien connu de Souslin; cf. p. ex. F. Hausdorff l. c., p. 191.

Théorème 6. *Les ensembles de la classe $\Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}_n)$ sont des complémentaires analytiques pour tout n naturel.*

Démonstration: Soit

$$\begin{array}{llll} G_1^{(1)}, & G_2^{(1)}, & \ldots, & G_n^{(1)} \\ G_1^{(2)}, & G_2^{(2)}, & \ldots, & G_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_1^{(j)}, & G_2^{(j)}, & \ldots, & G_n^{(j)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

la suite de tous les systèmes composés de n sous-ensembles „rationnels" disjoints de Y.

Posons pour tout $i = 1, 2, \ldots n$ et pour tout $j = 1, 2, \ldots$

$$H_i^{(j)} = X \times G_i^{(j)}.$$

On voit aisément que

$$\Gamma(E, \mathbf{D}_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \Gamma(E H_i^{(j)}, \mathbf{D}_1) - \Gamma(E, \mathbf{M}).$$

En vertu du théorème 3 et du théorème précité de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński[16]) il en résulte que $\Gamma(E, \mathbf{D}_n)$ est un complémentaire analytique pour tout ensemble borelien $E \subset X \times Y$, c. q. f. d.

La relation

$$\Gamma(E, \mathbf{D}) = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(E, \mathbf{D}_n)$$

pour tout $E \subset X \times Y$, et le théorème 6 entraînent le

Théorème 7. *Les ensembles de la classe $\Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D})$ sont des complémentaires analytiques.*

6. Enfin, pour établir les théorèmes inverses aux 2, 3, 4, 6 et 7 (dans le cas, où l'espace Y est *indénombrable*), nous allons démontrer le

Théorème 8. *Pour tout complémentaire analytique $E \subset X$ il existe un ensemble $H \subset X \times Y$ étant un G_δ et tel que $E = \Gamma(H, \mathbf{D}) = \Gamma(H, \mathbf{U}') = \Gamma(H, \mathbf{D}_1') = \Gamma(H, \mathbf{D}_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$*

[16]) Cf. [1]).

D é m o n s t r a t i o n. Tout espace métrique indénombrable et compact contenant une image homéomorphe de N, on peut se borner au cas $Y = N$.

Soit $y_k^{(n)}$ une suite double de nombres appartenant à N, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° si $m_1 < m_2$ ou bien si $m_1 = m_2$ et $k_1 < k_2$, on a $y_{k_1}^{(m_1)} > y_{k_2}^{(m_2)}$;

2° $\lim\limits_{k=\infty} y_k^{(n)} = y_1^{(n+1)}$.

Désignons par D l'ensemble des points $y_1^{(n)}$ et par $N_k^{(m)}$ l'ensemble des nombres irrationnels compris entre $y_k^{(m)}$ et $y_{k+1}^{(m)}$. $N_k^{(m)}$ étant homéomorphe à N, soit $\varphi_k^{(m)}(t)$ une fonction biunivoque et bicontinue telle que $\varphi_k^{(m)}(N_k^{(m)}) = N$.

La fonction $f(t)$ où $t \in N$, définie par l'égalité

$$f\left(\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots\right) = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_3} + \frac{1|}{|n_5} + \ldots \text{ [17]}$$

est continue sur N, on a $f(N) = N$, et pour tout $y \in N$ l'ensemble $f^{-1}(y)$ est condensé.

Soit $E \subset X$ un complémentaire analytique donné et $g(y)$ une fonction continue, définie sur N, telle que $g(N) = X - E$.

Posons pour tout $y \in N_k^{(m)}$:

$$\psi_k^{(m)}(y) = g\{f[\varphi_k^{(m)}(y)]\}$$

et désignons par $H_k^{(m)}$ l'image de la fonction $\psi_k^{(m)}(y)$, c. à d. l'ensemble de touts les points (x, y), tels que $x = \psi_k^{(m)}(y)$.

On voit aisément que l'ensemble

$$H = (X \times D) + \sum_{\substack{m=1\\k=1}}^{\infty} H_k^{(m)}$$

est un G_δ, et que $\Delta(H, \xi)$ est pour tout $\xi \in X - E$ un ensemble condensé, tandis qu'il est isolé, exactement dénombrable pour tout $\xi \in E$, d'où les relations qu'il fallait démontrer.

Les théorèmes 2—4 et 6—8 donnent le

Théorème 9. *On a:* $\Phi(\mathbf{B}, \mathbf{U}') = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{U}') = \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}) = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{D}) = \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}_1') = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{D}_1') = \Phi(\mathbf{B}, \mathbf{D}_n) = \Phi(\mathbf{G}_\delta, \mathbf{D}_n) =$ *classe des complémentaires analytiques (contenus dans X).*

[17]) Cf. la note précitée de MM. M a z u r k i e w i c z et S i e r p i ń s k i [1]), p. 162.

Sur la superposition des fonctions de Baire.

Par

W. S i e r p i ń s k i (Varsovie).

M. N. L u s i n a posé le problème suivant [1]):

Une fonction de classe 3 de Baire est-elle toujours une superposition de trois fonctions de classe 1? En autres termes, existe-t-il pour toute fonction $f(x)$ de classe 3 trois fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\vartheta(x)$ de classe 1, telles qu'on ait pour tout x réel

$$f(x) = \varphi(\psi(\vartheta(x)))?$$

Dans cet ordre d'idées nous démontrerons ici le théorème suivant:

Théorème: *Il existe un ensemble linéaire E et une fonction $\varphi(x)$ définie dans E et de première classe dans E, telle que, quelle que soit la fonction $f(x)$ d'une variable réelle de classe 3, il existe une fonction d'une variable réelle $\vartheta(x)$ de classe 1, dont les valeurs, ainsi que celles de la fonction $\varphi(\vartheta(x))$, appartiennent à E, et telle que pour tout x réel on a*

$$f(x) = \varphi(\varphi(\vartheta(x))). \tag{1}$$

Lemme. *Il existe un ensemble linéaire E et une fonction $\varphi(x)$ définie dans E et de classe 1 dans E, telle que pour toute fonction d'une variable réelle $f(x)$ de classe ν, où ν est un nombre naturel > 1, il existe une fonction d'une variable réelle $\psi(x)$ de classe $\nu - 1$, dont les valeurs appartiennent à E et telle que pour tout x réel*

$$f(x) = \varphi(\psi(x)). \tag{2}$$

[1]) *Fund. Math.*, t. V (1924), p. 337.