Ist p_m $(m=1,2,\dots)$ ein Punkt aus $A_m\cdot[R-U(R-B_m;\,1/n)]$ und p ein Häufungspunkt der Folge p_m, so liegt nach (15) p in A, und nach (14) gibt es somit einen Punkt q aus $R-B$, so dass $\overline{p,q}<1/n$; dann ist

$$\overline{p_m,q}<1/n \quad \text{(für unendlich viele } m). \tag{16}$$

Für genügend grosse Werte von m liegt q in $R-B_m$, denn aus $q\subset B_m$ (für unendlich viele Werte von m) würde nach (15) folgen: $q\subset B$. Die Beziehung (16) ergibt also für unendlich viele m: $p_m\subset U(R-B_m;\,1/n)$, während doch p_m als ein Punkt von $R-U(R-B_m;\,1/n)$ gewählt war. Widerspruch!

Sur une certaine suite infinie de fonctions d'une variable réelle.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

En m'occupant d'un problème posé par M. Ruziewicz et en connexion avec un théorème que j'ai trouvé avec M^lle Braun[1]), j'ai démontré, comme conséquence d'un autre théorème, le théorème suivant[2]):

Théorème. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe une suite infinie de fonctions univoques d'une variable réelle* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x),\dots$, *telle que, quel que soit l'ensemble non dénombrable* N *de nombres réels, toutes les fonctions de notre suite, sauf peut être un nombre fini d'entre elles, transforment* N *en l'ensemble de tous les nombres réels.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration directe de ce théorème.

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Il existe donc une suite transfinie du type Ω,

$$x_\omega,\ x_{\omega+1},\ x_{\omega+2},\dots,\ x_\alpha,\dots \quad (\alpha<\Omega) \tag{1}$$

formée de tous les nombres réels différents.

L'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels, ainsi que l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels ayant la puissance du continu, donc, d'après notre hypothèse, la puissance $\aleph_1$, il résulte tout de suite de la formule $\aleph_1^2=\aleph_1$ qu'il existe une correspondance, d'après laquelle à tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ cor-

[1]) *Fund. Math.* t. XIX, p. 2 (Proposition (R)).
[2]) *Bulletin de l'Académie Royale Serbe*, séance du 9 mai 1932.

respond une suite infinie de nombres réels $(t_1^\alpha, t_2^\alpha, t_3^\alpha, \ldots)$ et une suite infinie de nombres naturels $(n_1^\alpha, n_2^\alpha, n_3^\alpha, \ldots)$, de sorte que, quelle que soient la suite infinie de nombres réels $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et la suite infinie de nombres naturels $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $x_k = t_k^\alpha$ et $n_k = n_k^\alpha$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

α étant un nombre ordinal transfini $< \Omega$, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$ est dénombrable et il existe une suite infinie

$$\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \xi_3^\alpha, \ldots,$$

formée de tous ces nombres.

Soit x un nombre réel donné. Il existe donc un nombre ordinal transfini $\alpha < \Omega$ bien déterminé, tel que $x = x_\alpha$. Posons, pour k naturels

$$f_k(x) = t^{\xi_k^\alpha}_{n_k^{\xi_k^\alpha}}. \tag{1}$$

Les fonctions $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont ainsi définies pour tous les x réels. Je dis qu'elles satisfont aux conditions de notre théorème.

En effet, soit N un ensemble non dénombrable de nombres réels et admettons qu'il existe une infinité de fonctions de la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots$ qui ne transforment pas l'ensemble N en l'ensemble de tous les nombres réels. Il existe donc une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ et une suite infinie de nombres réels $y_1, y_2, y_3, \ldots$, tels que

$$y_k \text{ non } \epsilon f_{m_k}(N). \tag{2}$$

Comme nous savons, il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que

$$m_k = n_k^\mu \quad \text{et} \quad y_k = t^\mu_{m_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Soit maintenant α un nombre ordinal, tel que $\mu < \alpha < \Omega$. Il existe donc un indice k, tel que $\mu = \xi_k^\alpha$, d'où, d'après (3):

$$y_k = t^{\xi_k^\alpha}_{n_k^{\xi_k^\alpha}}:$$

d'après la définition de la fonction $f_k(x)$ on a donc

$$f_k(x_\alpha) = y_k,$$

ce qui prouve, d'après (2), que x_α non ϵ N.

Nous avons donc x_α non ϵ N pour $\alpha > \mu$, ce qui prouve que l'ensemble N est au plus dénombrable, contrairement à l'hypothèse.

Toutes les fonctions de la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots$, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles, transforment donc l'ensemble N en l'ensemble de tous les nombres réels, et notre théorème est démontré.

Désignons maintenant par J_k l'image géométrique de la fonction $f_k(x)$ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $f_k(x) = y$). Posons $E = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots$ L'ensemble plan E est évidemment au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées.

Soit maintenant $y = b$ une parallèle à l'axe d'abscisses et admettons qu'elle contient un ensemble non dénombrable Q de points n'appartenant pas à E. Soit N l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $(x, b) \,\epsilon\, Q$: l'ensemble N est évidemment aussi non dénombrable. D'après la propriété de notre suite de fonctions, il existe donc un indice k, tel que la fonction $f_k(x)$ transforme l'ensemble N en l'ensemble de tous les nombres réels: on a donc $b \,\epsilon\, f_k(N)$, c'est-à-dire il existe un nombre a de N, tel que $b = f_k(a)$, d'où résulte que $(a, b) \,\epsilon\, J_k$ et, à plus forte raison: $(a, b) \,\epsilon\, E$. Or, d'après $a \,\epsilon\, N$ et la définition de N, nous avons $(a, b) \,\epsilon\, Q$. On aurait donc $EN \neq 0$, contrairement à l'hypothèse. Donc:

L'ensemble plan E est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et son complémentaire (par rapport au plan) *est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses.*

L'existence d'un tel ensemble plan E est, comme j'ai démontré ailleurs, équivalente à l'hypothèse du continu [1]).

Il est encore à remarquer qu'on peut facilement démontrer qu'*il n'existe aucune suite infinie de fonctions définies pour les valeurs naturelles de la variable, telle que tout ensemble infini de nombres naturels soit transformé par une au moins de fonctions de cette suite en l'ensemble de tous les nombres naturels.*

[1]) Voir *Fund. Math.*, t. V, p. 179.