Er hat die Menge $F_1 \cdot (F'' + \overline{U}(F', e + \varepsilon))$ zu seinen Träger, berandet also in der $(d + \varepsilon)$-Umgebung dieses Trägers, d. h. jedenfalls in $U(F', d + e + 2\varepsilon)$. Ebenso beweist man, daß der wahre Zyklus

$$Z_2^{r-1} = (z_1'', z_2'', \ldots, z_k'', \ldots)$$

in $U(F', d + e + 2\varepsilon)$ berandet. Da $z_k^{r-1} = z_k + z_k'$ ist, muß auch Z^{r-1} in $U(F', d + e + 2\varepsilon)$ beranden, w. z. b. w.

Ganz elementare Beispiele machen den anschaulichen Inhalt dieses Satzes klar.

Ascona (Lago Maggiore), 15. X. 1932.

Über Schnitte in topologischen Räumen.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

Sei R ein separabler metrisierbarer topologischer Raum [1]). Ein Paar von nicht-leeren Teilmengen A und B von R mit den Eigenschaften:

$$\overline{R - A} = B, \quad \overline{R - B} = A \text{ [1a])} \tag{1}$$

nennen wir einen *Schnitt* des Raumes R [2]) und verwenden dafür die Bezeichnung $A|B$ (Auf die Reihenfolge der Mengen wird keine Rücksicht genommen: $A|B \equiv B|A$!).

Aus 1. folgt leicht:

$$A + B = R. \tag{2}$$

Ferner ergibt sich aus 1., dass die Mengen A und B abgeschlossen sind. Die gleichfalls abgeschlossene (eventuell leere) Menge $A \cdot B$ heisst die *Randmenge* des Schnittes $A|B$. Von zwei Mengen M und N sagen wir, sie seien durch den Schnitt $A|B$ *getrennt*, wenn bei geeigneter Bezeichnung:

$$M \cdot B = 0, \quad N \cdot A = 0 \tag{3}$$

[1]) Von den dimensionstheoretischen Anwendungen abgesehen, gelten die folgenden Überlegungen allgemeiner für *normale* (nicht notwendig separable) topologische Räume.

[1a]) Mit $\overline{M}$ wird wie üblich die *abgeschlossene Hülle* der Menge M bezeichnet.

[2]) In meiner Note in Proc. Ac. Amst. 29 (1926), S. 163 wurde der Schnitt als ein System aus *drei* paarweise fremden Mengen E_1, E_2, F erklärt, wo $R = E_1 + E_2 + F$, $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$ und F gemeinsame Begrenzung von E_1 und E_2 ist. Der Unterschied zwischen den beiden Definitionen ist rein formal. Der gegenseitige Übergang wird durch die Formeln vermittelt: $E_1 = R - A$, $E_2 = R - B$, $F = A . B$ und umgekehrt: $A = E_2 + F$, $B = E_1 + F$.

gilt. Triviale Folgerungen aus der Definition: Mit M und N sind auch je zwei Mengen M' und N', wo $M'\subset M$ und $N'\subset N$, durch den Schnitt $A|B$ getrennt; die Menge $M+N$ ist zur Randmenge $A\cdot B$ fremd; ferner gilt: $\overline{M}\cdot N\subset(R-A)\cdot(R-B)=B\cdot(R-B)=0$ und ebenso $M\cdot\overline{N}=0$. Wir zeigen umgekehrt:

(a) *Wenn für die nicht-leeren Mengen M und N $\overline{M}\cdot N+M\cdot\overline{N}=0$ gilt, gibt es immer einen diese Mengen trennenden Schnitt.*

Da R ein normaler Raum ist, existiert eine *offene* Menge G, so daß

(4) $$M\subset G;\quad N\cdot\overline{G}=0.$$

Wir setzen:

(5) $$A=\overline{G},\quad B=\overline{R-G},$$

Die Mengen A und B bilden einen Schnitt; zunächst sind sie nämlich nicht leer, denn nach (4) ist M in A und N in B enthalten. Ferner ist nach (5) die erste Relation in (1) erfüllt. Auch die zweite ergibt sich leicht aus (5), denn *erstens* ist $R-B=R-(\overline{R-\overline{G}})\subset R-(R-\overline{G})=\overline{G}$, also $R-B\subset\overline{G}=A$ und *zweitens* $B\subset\overline{R-G}=R-G$ also $R-B\supset G$ und $\overline{R-B}\supset\overline{G}=A$. Endlich ist das Mengenpaar M, N durch den Schnitt $A|B$ getrennt, denn es gilt $N\cdot A=0$ (folgt unmittelbar aus (4) und (5)), und, wie eben bemerkt, gilt $B\subset R-G$, daher nach (4) $M\cdot B=0$.

Eine wichtige Folgerung aus (a) ist, dass sich je zwei fremde *offene* und ebenso je zwei fremde *abgeschlossene* Mengen immer durch einen Schnitt trennen lassen.

Viele wichtige Begriffe der Topologie (vor allem der Dimensionstheorie) lassen sich auf das Verhalten der Schnitte zurückführen. Zum Beispiel ist der Raum R *zusammenhängend* dann und nur dann, wenn keine Schnitte mit *leeren Randmengen* vorkommen. Ferner gilt: Damit R höchstens n-dimensional sei, ist notwendig und hinreichend, dass sich je zwei fremde abgeschlossene Mengen *durch einen Schnitt* mit *höchstens $(n-1)$-dimensionaler Randmenge* trennen lassen. In diese Gestalt kann man nämlich den bekannten Satz bringen, wonach eine Menge R dann und nur dann höchstens n-dimensional ist, wenn es zu je zwei fremden in R abgeschlossenen

Mengen M und N zwei abgeschlossene Mengen P und Q gibt, so dass

$$R=P+Q,\quad M\subset R-Q,\quad N\subset R-P,\quad \dim(P\cdot Q)\leq n-1\ [3].$$

Aus diesem Satz folgt unmittelbar, dass die oben aufgestellte Bedingung hinreichend ist. Dass sie notwendig ist, ersieht man daraus, dass es zu den punktfremden offenen Mengen $R-P$ und $R-Q$ nach Satz (a) einen diese Mengen trennenden Schnitt gibt, durch den natürlich die Mengen M und N a fortiori getrennt sind. Die Randmenge dieses Schnittes ist zu $R-P$ und $R-Q$ fremd, ist also eine Teilmenge von $P\cdot Q$ und daher höchstens $(n-1)$-dimensional.

Ähnlich zeigt man: Ein n-dimensionaler kompakter Raum R ist dann und nur dann eine *Cantorsche Mannigfaltigkeit* [4]), wenn jeder Schnitt des Raumes eine mindestens $(n-1)$-dimensionale Randmenge hat.

Aus der Gesamtheit aller Schnitte des Raumes R wollen wir jetzt einen *topologischen Raum* bilden, indem wir in Übereinstimmung mit den bekannten Hausdorff'schen Axiomen *Umgebungen* der Schnitte definieren. Ist $A|B$ ein beliebiger Schnitt, und M, N ein Paar durch $A|B$ getrennter Mengen, so verstehen wir unter der Umgebung $\mathfrak{U}_{M,N}$ von $A|B$ die *Menge aller Schnitte, von denen M und N getrennt sind* [5]). Man sieht sofort, dass es zu jedem Schnitt Umgebungen gibt. Sind ferner $\mathfrak{U}_{M,N}$ und $\mathfrak{U}_{M',N'}$ zwei Umgebungen desselben Schnittes $A|B$, wo etwa $M\cdot B=0$, $M'\cdot B=0$, $N\cdot A=0$, $N'\cdot A=0$, so ist auch $\mathfrak{U}_{M+N,M'+N'}$ eine Umgebung von $A|B$, die, wie leicht ersichtlich, in jeder der vorgegebenen Umgebungen $\mathfrak{U}_{M,N}$ und $\mathfrak{U}_{M',N'}$ enthalten ist. Etwas schwieriger ist der Nachweis, dass das *Trennungsaxiom* erfüllt ist, d. h. dass je zwei verschiedene Schnitte $A|B$ und $C|D$ sich in zwei Umgebungen ohne gemeinsame Elemente

[3]) Vgl. Hurewicz, *Normalbereiche und Dimensionstheorie*, Math. Ann. 96, S. 763.

[4]) Ein n-dimensionaler kompakter Raum heisst nach Urysohn eine *Cantorsche Mannigfaltigkeit*, wenn er nach Tilgung einer jeden $(n-2)$-dimensionalen Teilmenge zusammenhängend bleibt, oder, was damit gleichbedeutend, wenn für jede Zerlegung von R in zwei nicht leere abgeschlossene Teilmengen der Durchschnitt dieser Mengen mindestens $(n-1)$-dimensional ist.

[5]) Vgl. meine sub [2]) zitierte Note.

einbetten lassen. Wir zeigen zuerst: falls $A|B$ von $C|D$ verschieden, gelten entweder die beiden Relationen:

$$A + C \neq R, \quad A + D \neq R, \tag{6}$$

oder die beiden Relationen:

$$B + C \neq R, \quad B + D \neq R. \tag{6'}$$

Sonst hätte man nämlich eines der folgenden vier Relationspaare: α) $A + C = R$, $B + C = R$; β) $A + D = R$, $B + C = R$; γ) $A + C = R$, $B + D = R$; δ) $A + D = R$, $B + D = R$. Der Fall α) führt sofort ad absurdum, denn aus der ersten Formel in α) folgt: $A = \overline{A} \supset \overline{R - C} = D$ und aus der zweiten: $C = \overline{C} \supset \overline{R - B} = A$; dies ergibt $C \supset D$ also $(R - C) \cdot D = 0$, was wegen $D = R - C \neq 0$ unmöglich ist. Ebenso erledigt sich der symmetrische Fall δ). Aus den Formeln β) würde folgen: $A \supset \overline{R - D} = C$, $D \supset \overline{R - A} = B$, $B \supset \overline{R - C} = D$, $C \supset \overline{R - B} = A$, also zusammengefasst: $A = C$, $B = D$, und die beiden Schnitte wären identisch, im Widerspruch zur Voraussetzung. Analog wird der Fall γ) behandelt.

Wir können also annehmen, es seien etwa die Relationen (6) erfüllt, oder, was dasselbe bedeutet, es seien die Mengen $R - (A + C)$ und $R - (A + D)$ nicht leer. Wählen wir aus jeder dieser Mengen je einen Punkt p, bzw. q und ausserdem einen Punkt r aus $R - B$. Das Punktepaar p, q ist durch $C|D$, jedes der Punktepaare p, r und q, r durch $A|B$ getrennt. Die Umgebungen $\mathfrak{U}_{p+q,r}$ und $\mathfrak{U}_{p,q}$ von $A|B$, bzw. $C|D$ haben keine gemeinsame Elemente, denn jeder Schnitt aus der zweiten Umgebung trennt die Punkte p und q, während dies kein Schnitt aus der ersten Umgebung tut.

Damit sind sämtliche Hausdorffsche Axiome als gültig erwiesen. Den so gebildeten topologischen Raum bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(R)$. Man könnte leicht zeigen, dass $\mathfrak{S}(R)$ ein regulärer Raum ist (d. h. dass es zu jeder Umgebung eines Schnittes eine andere Umgebung desselben Schnittes gibt, deren abgeschlossene Hülle in der ersten enthalten ist), doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen. Falls R nicht kompakt ist, ist $\mathfrak{S}(R)$ weder separabel noch metrisierbar ($\mathfrak{S}(R)$ genügt nicht einmal dem „ersten Abzählbarkeitsaxiom").

Das Hauptziel dieser Arbeit besteht in der Feststellung einer Eigenschaft, die dem Raum $\mathfrak{S}(R)$ ganz unabhängig von der besonderen Struktur des Raumes R zukommt und den tieferen Kern

zahlreicher topologischer und in erster Linie dimensionstheoretischer Sätze bildet.

Einer der wichtigsten und bekanntesten Sätze der Punktmengenlehre besagt, dass, wenn M ein kompakter metrischer Raum oder allgemeiner eine G_δ-Menge in einem vollständigen metrischen Raum ist, je abzählbar-viele in M offene und in M dichte Mengen einen in M dichten Durchschnitt haben [6]). Inhaltlich gleichbedeutend ist die Behauptung, dass jede in M offene Menge von *zweiter Kategorie* im Sinne von *Baire* (d. h. keine Summe von abzählbar vielen nirgends-dichten Mengen) ist.

Wir wollen nun einen topologischen Raum M einen *Baire'schen Raum nennen*, wenn der *Durchschnitt von je abzählbar-vielen in M dichten und offenen Mengen in M dicht liegt*. Insbesondere ist jeder kompakte Raum ein Baire'scher Raum.

Wir wollen nun beweisen:

Der aus Schnitten gebildete Raum $\mathfrak{S}(R)$ ist immer ein Baire'scher Raum.

Es liege in $\mathfrak{S}(R)$ eine Folge von in $\mathfrak{S}(R)$ offenen und dichten Mengen

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots$$

[6]) Die wichtige Rolle, welche dieser Satz insbesondere bei *topologischen* Untersuchungen spielt, wurde noch bis vor Kurzem wenig beachtet. Oft lassen sich, namentlich bei Existenzbeweisen, komplizierte Approximationsbetrachtungen durch Anwendung des erwähnten Theorems vermeiden. Das Theorem wird dabei meistens nicht in dem Raum angewendet, der das eigentliche Objekt der Untersuchung bildet, sondern, in einem Raum „höherer Gattung", etwa im Hausdorffschen Raum der abgeschlossenen Mengen, oder im Raum der stetigen Funktionen, oder endlich wie in dieser Arbeit im Raum der Schnitte. Handelt es sich z. B. darum, die Existenz einer abgeschlossenen Menge von einer bestimmten Eigenschaft nachzuweisen, so versucht man die Gesammtheit der abgeschlossenen Mengen, welche die fragliche Eigenschaft haben, als Durchschnitt von abzählbar-vielen offenen und dichten Mengen im Hausdorffschen Raum der abgeschlossenen Mengen darzustellen. Vgl. Mazurkiewicz, *Sur les continus absolument indécomposables*, Fund. Math. 16, S. 151 und Hurewicz, *Dimensionstheorie und Cartesische Räume*, Amst. Proceedings 34, S. 399. In diesen (ungefähr gleichzeitig erschienenen) Arbeiten wurde die oben angedeutete Methode zum ersten Mal (auf zwei ganz verschiedene Fragestellungen) angewendet. Weitere Anwendung findet sich bei Kuratowski, *Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de la dimension*, Fund. Math., 18, S. 285.

vor. Es ist zu zeigen, dass, wenn $\mathfrak{G}_0$ irgend eine in $\mathfrak{S}(R)$ offene Menge bedeutet,

$$\mathfrak{G}_0 \cdot \mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{G}_n \ldots \neq 0.$$

Wir greifen aus $\mathfrak{G}_0$ irgend einen Schnitt $A_0|B_0$ heraus. Da $\mathfrak{G}_0$ offen, gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}_{M_0, N_0}$ von $A_0|B_0$, die ganz in $\mathfrak{G}_0$ enthalten ist. Zu den fremden abgeschlossenen Mengen M_0 und N_0 lassen sich zwei offene Mengen V_0 und W_0 angeben, so dass

$$M_0 \subset V_0, \quad N_0 \subset W_0, \quad \overline{V}_0 \cdot \overline{W}_0 = 0.$$

Nach (a) gibt es einen $\overline{V}_0$ und $\overline{W}_0$ trennenden Schnitt. Die Menge $\mathfrak{U}_{\overline{V}_0, \overline{W}_0}$ ist also definiert und nicht leer, und man hat offenbar:

$$\mathfrak{U}_{\overline{V}_0, \overline{W}_0} \subset \mathfrak{U}_{M_0, N_0} \subset \mathfrak{G}_0.$$

Da $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{S}(R)$ dicht, enthält die Umgebung $\mathfrak{U}_{\overline{V}_0, \overline{W}_0}$ einen der Menge $\mathfrak{G}_1$ angehörenden Schnitt, etwa $A_1|B_1$. Wie oben wählen wir eine Umgebung:

$$\mathfrak{U}_{M_1, N_1} \subset \mathfrak{G}_1$$

von $A_1|B_1$. Der Schnitt $A_1|B_1$ trennt die Mengen M_1 und N_1 und ebenso die Mengen $\overline{V}_0$ und $\overline{W}_0$ also bei passender Bezeichnung auch die Mengen $M_1 + \overline{V}_0$ und $N_1 + \overline{W}_0$. Die letztgenannten Mengen sind dann zueinander fremd, und wir können wieder zwei offene Mengen V_1 und W_1 bestimmen, so dass

$$M_1 + \overline{V}_0 \subset V_1, \quad N_1 + \overline{W}_0 \subset W_1, \quad \overline{V}_1 \cdot \overline{W}_1 = 0.$$

Für die (nicht leere) Menge $\mathfrak{U}_{\overline{V}_1, \overline{W}_1}$ gilt dann $\mathfrak{U}_{\overline{V}_1, \overline{W}_1} \subset \mathfrak{U}_{M_1, N_1}$ und somit:

$$\mathfrak{U}_{\overline{V}_1, \overline{W}_1} \subset \mathfrak{G}_1.$$

Mit der Umgebung $\mathfrak{U}_{\overline{V}_1, \overline{W}_1}$ und der Menge $\mathfrak{G}_2$ verfahren wir jetzt ganz analog, wie soeben mit der Ungebung $\mathfrak{U}_{\overline{V}_0, \overline{W}_0}$ und der Menge $\mathfrak{G}_1$. Das Verfahren ad infinitum fortsetzend, bekommt man zwei Folgen

$$V_0, \; V_1, \; V_2, \ldots; \quad W_0, \; W_1, \; W_2, \ldots,$$

wo die V_n und W_n offene Mengen sind, und die Beziehungen gelten:

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & V_{n+1} \supset \overline{V}_n, \quad W_{n+1} \supset \overline{W}_n; \quad V_n \cdot W_n = 0 \\ (8) & \qquad \mathfrak{U}_{\overline{V}_n, \overline{W}_n} \subset \mathfrak{G}_n. \end{array}\right\} \; n = 0, 1, 2 \ldots$$

Sei V die Summe aller V_n und W die Summe aller W_n. V und W sind offene und wegen (7) zueinander fremde Mengen; es gibt daher nach (a) einen sie trennenden Schnitt $A|B$. Mit Rücksicht auf (7) ist für jedes n $\overline{V}_n \subset V$ und $\overline{W}_n \subset W$, folglich ist das Mengenpaar $\overline{V}_n$, $\overline{W}_n$ durch $A|B$ getrennt, mit anderen Worten gehört $A|B$ jeder der Umgebungen $\mathfrak{U}_{\overline{V}_n, \overline{W}_n}$ an. Nach (8) ist dann $A|B$ in allen Mengen $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ enthalten, also ist der Durchschnitt von $\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_3 \ldots$ mit jeder offenen Menge $\mathfrak{G}_0$ nicht-leer, folglich ist $\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_3 \ldots$ dicht in $\mathfrak{S}(R)$.

Mit Hilfe dieses Theorems lassen sich viele Beweise der Dimensionstheorie erheblich abkürzen. Wir werden dies an einigen Beispielen näher erläutern. Vorher bemerken wir noch, dass man die oben erwähnte Charakterisierung der höchstens n-dimensionalen Mengen auch in die folgende Gestalt bringen kann: R ist höchstens n-dimensional dann und nur dann, wenn die Schnitte mit höchstens $(n-1)$-dimensionalen Randmengen in $\mathfrak{S}(R)$ *dicht* liegen. Insbesondere sind also nulldimensionale Räume dadurch charakterisiert, dass in ihnen die Schnitte mit *leeren* Randmengen eine in $\mathfrak{S}(R)$ dichte Menge ergeben.

Unser Resultat wenden wir zunächst auf den bekannten *Summensatz* [7]) der Dimensionstheorie an: *Ist R Summe von abzählbarvielen in R abgeschlossenen höchstens n-dimensionalen Mengen, so ist auch R höchstens n-dimensional.* Der übliche Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei Hälften: Zuerst wird der Satz für den Spezialfall $n = 0$ bewiesen [8]) und daraus durch einen einfachen Induktionsschluss seine Gültigkeit für beliebiges n abgeleitet [9]). Der erste Teil dieses Beweises (der Fall $n = 0$) lässt sich nun unter Benützung der Tatsache, dass $\mathfrak{S}(R)$ ein Baire'scher Raum ist auf wenige Worte reduzieren. Aus der oben angeführten Charakterisierung der nulldimensionalen Mengen folgt nämlich leicht: Ist Q eine in R abgeschlossene nulldimensionale Menge, so bilden jene Schnitte von R, deren Randmengen zu Q fremd sind, eine in $\mathfrak{S}(R)$ dichte Menge. Ferner ist diese Menge in $\mathfrak{S}(R)$ *offen*, denn, ist die Randmenge $A \cdot B$

[7]) Vgl. Menger, *Dimensionstheorie* (1928), S. 92 ff.

[8]) Vgl. etwa Hurewicz, *Normalbereiche und Dimensionstheorie*, Math. Ann. 96_2 S. 745.

[9]) Vgl. vorige Zitate, S. 758 und 760.

des Schnittes $A|B$ zu Q fremd, so hat diese Eigenschaft auch jeder Schnitt aus der Umgebung $\mathfrak{U}_{AQ,BQ}$. Sei jetzt $R = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$, wo Q_m abgeschlossene nulldimensionale Mengen sind; bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller Schnitte von R, deren Randmengen zu Q_m fremd sind, so ist $\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{G}_3 \ldots$ die Menge aller Schnitte mit *leeren Randmengen* und nach dem obigen ist diese Menge in $\mathfrak{S}(R)$ dicht, also ist R nulldimensional.

Als zweites etwas komplizierteres Beispiel nehmen wir den Urysohn'schen Satz [10]): Ist R ein *kompakter* Raum und gibt es für jede positive Zahl ε eine Darstellung von R als Summe von endlich vielen abgeschlossenen Mengen, deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind und die zu je $n+2$ fremd sind, so ist R höchstens n-dimensional.

Sei (für $n > 0$) $d_n(R)$ die untere Schranke aller Zahlen ε mit der Eigenschaft, dass R Summe ist von endlich vielen zu je $n+1$ fremden abgeschlossenen Mengen mit Durchmessern $< \varepsilon$. Dann können wir den Urysohnschen Satz in dieser Form aussprechen:

Aus $d_{n+1}(R) = 0$ folgt: $\dim R \leq n$ (vorausgesetzt, dass R kompakt).

Für $n = 0$ ist der Beweis ganz einfach. Angenommen, die Behauptung stehe für $n-1$ bereits fest. Wir setzen voraus $d_{n+1}(R) = 0$ und zeigen zunächst: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen die Schnitte $A|B$ mit der Eigenschaft:

$$(9) \qquad d_n(A \cdot B) < \varepsilon$$

in $\mathfrak{S}(R)$ dicht. Seien zum Beweis M und N zwei fremde (nicht leere) in R abgeschlossene Mengen. Wegen der Kompaktheit des Raumes R haben M und N einen positiven Abstand, etwa η. Wegen $d_{n+1}(R) = 0$ gibt es eine Darstellung:

$$P = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$$

wo die abgeschlossenen Mengen F_i zu je $n+2$ fremd sind und Durchmesser $< \varepsilon$ und $< \eta$ haben. Die Numerierung sei so gewählt, dass die ersten k der Mengen F_i mit M gemeinsame Punkte haben (folglich *keine* gemeinsame Punkte mit N) und die übrigen $m-k$ zu M fremd seien. Sei F^0 die Summe der ersten k Mengen F_i, F^1 die Summe der übrigen $m-k$, dann ist

$$F^0 \cdot N = 0, \quad F^1 \cdot M = 0.$$

[10]) Vgl. Menger, *Dimensionstheorie*, S. 174.

Wegen $R = F^0 + F^1$ sind die offenen Mengen $R - F^0$ und $R - F^1$ fremd, folglich gibt es einen sie trennenden Schnitt etwa $A|B$. Nach (10) sind auch die Mengen M und N durch $A|B$ getrennt, d. h. $A|B$ gehört der Umgebung $\mathfrak{U}_{M,N}$ an. Die Randmenge $A \cdot B$ ist zu den getrennten Mengen $R - F^0$ und $R - F^1$ fremd, also:

$$(11) \qquad A \cdot B \subset F^0 \cdot F^1 = F^0 \cdot \sum_{i=k+1}^{m} F_i = \sum_{i=k+1}^{m} F^0 \cdot F_i.$$

Nun kann ein Punkt p von F^0 in höchstens n der Mengen $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_m$ gleichzeitig enthalten sein, denn p liegt nach Voraussetzung in höchstens $n+1$ Mengen des Gesamtsystems $(F_1, \ldots, F_m)$ und sicher in mindestens einer der Mengen $F_1, \ldots, F_k$. Folglich haben je $n+1$ der Mengen $F^0 \cdot F_i$ $(i > k)$ keine gemeinsame Punkte, und, da die Durchmesser dieser Mengen $< \varepsilon$ sind, ergibt die Formel (11): $d_n(F^0 \cdot F^1) < \varepsilon$ und a fortiori [11]) $d_n(A \cdot B) < \varepsilon$. Damit ist gezeigt, dass die Schnitte mit der Eigenschaft (9) in jeder Umgebung $\mathfrak{U}_{M,N}$ vorkommen, d. h. eine in $\mathfrak{S}(R)$ dichte Menge bilden.

Wir zeigen jetzt, dass die Schnitte mit der Eigenschaft (9) eine in $\mathfrak{S}(R)$ *offene* Menge bilden. Wir benützen dabei den folgenden ganz einfach beweisbaren Satz [12]): Ist $A \subset R$ eine abgeschlossene Menge und gilt $d_n(A) < \varepsilon$, so gibt es eine offene Menge $G \supset A$, so dass $d_n(G) < \varepsilon$. Es gelte nun für einen Schnitt $A \cdot B$ die Ungleichung (9). Nach dem Vorangehenden bestimmen wir eine offene Menge U, so dass:

$$U \supset A \cdot B; \quad d_n(U) < \varepsilon.$$

Dann gilt für jeden Schnitt $A'|B'$ der Umgebung $\mathfrak{U}_{A-AU,B-BU}$ $A' \cdot B' \subset U$ und somit

$$d_n(A' \cdot B') < \varepsilon.$$

Die Behauptung ist bewiesen.

Bezeichnen wir jetzt mit $\mathfrak{A}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller Schnitte $A|B$ mit

$$d_n(A \cdot B) < 1/m,$$

so ist der Durchschnitt dieser Mengen als Durchschnitt von abzählbar-vielen in $\mathfrak{S}(R)$ offenen und dichten Mengen selbst in $\mathfrak{S}(R)$ dicht. $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{A}_2 \ldots$ besteht offenbar aus Schnitten $A|B$, für die

[11]) Wir benützen hier die triviale Tatsache; Aus $A \subset B$ folgt; $d_n(A) \leq d_n(B)$.

[12]) Vgl. etwa Urysohn, Fund. Math. 8, S. 291.

$d_n(A\cdot B)=0$. Nach der Induktionsvoraussetzung kann man aber dafür schreiben:

$$\dim(A\cdot B)\leqq n-1.$$

Also liegen die Schnitte mit höchstens $(n-1)$-dimensionalen Randmengen in $\mathfrak{S}(R)$ dicht. Dies bedeutet aber, dass R höchstens n-dimensional ist. Der Urysohn'sche Satz ist bewiesen.

Zum Abschluss dieser Untersuchung zeigen wir, dass im Fall eines *kompakten* Raumes R der zugehörige Raum der Schnitte $\mathfrak{S}(R)$ *mit einer G_δ-Menge eines kompakten metrischen Raumes homöomorph ist*, folglich selbst separabel und metrisierbar ist und bei geeigneter Metrisierung sogar als ein vollständiger metrischer Raum betrachtet werden kann [12a]). In diesem Satz ist auch die Tatsache, dass $\mathfrak{S}(R)$ ein Baire'scher Raum ist, inbegriffen.

Zum Beweise unserer Behauptung ziehen wir den *Hausdorffschen Raum* [13]) heran, dessen Elemente die abgeschlossenen Teilmengen von R sind; dabei wird der Abstand $\overline{AB}$ zweier abgeschlossener Mengen A und B als die untere Grenze aller Zahlen $\eta>0$ mit der Eigenschaft

$$A\subset U(B;\eta),\quad B\subset U(A;\eta)\ {}^{13a)}$$

erklärt. Der so definierte metrische Raum ist bekanntlich (bei kompaktem R) *kompakt* [14]). Wir betrachten nunmehr die Gesamtheit aller *ungeordneten Paare* (A,B) wo A, B wieder nicht-leere in R abgeschlossene Menge sind und definieren als Abstand zweier Paare (A,B) und (A',B') die kleinere unter den Zahlen

$$\sqrt{(\overline{AA'})^2+(\overline{BB'})^2},\quad \sqrt{(\overline{AB'})^2+(\overline{A'B})^2}.$$

Dadurch erhalten wir einen neuen metrischen Raum, den wir mit $\Pi(R)$ bezeichnen wollen. Aus der Kompaktheit des Hausdorff'schen Raumes folgt sehr einfach die Kompaktheit des Raumes $\Pi(R)$. Eine Teilmenge von $\Pi(R)$ bilden diejenigen Paare (A,B), die der am Anfang dieser Arbeit aufgestellten Forderung 1. genügen. Wir zeigen nun, dass diese Teilmenge von $\Pi(R)$ mit dem Raum $\mathfrak{S}(R)$ homöomorph ist. Dazu müssen wir folgendes nachweisen:

1) Ist $A|B$ ein Schnitt und $\mathfrak{U}_{M,N}$ eine Umgebung von $A|B$, so gibt es eine Zahl $\varepsilon>0$, derart, dass jeder Schnitt $A'|B'$ für den $\overline{AA'}<\varepsilon$ und $\overline{BB'}<\varepsilon$ gilt, der Umgebung $\mathfrak{U}_{M,N}$ angehört.

2) Ist ein Schnitt $A|B$ und eine Zahl $\varepsilon>0$ vergegeben, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}_{M,N}$, so dass jeder dieser Umgebung angehörende Schnitt $A'|B'$ bei geeigneter Bezeichnung die Bedingungen $\overline{AA'}<\varepsilon$, $\overline{BB'}<\varepsilon$ erfüllt.

Beweis von 1): Sei etwa $M\cdot B=0$, $N\cdot A=0$, dann gilt mit Rücksicht auf die Kompaktheit von R für hinreichend kleines positives ε: $M.U(B;\varepsilon)=0$

[12a]) Bekanntlich ist jede G_δ-Menge eines vollständigen Raumes mit einem vollständigen Raum homöomorph.

[13]) Vgl. Hausdorff, *Mengenlehre* (1927), S. 145.

[13a]) $U(A,\eta)$ bedeutet, wie üblich die Menge aller Punkte, deren Abstand von A kleiner als η ist.

[14]) Hausdorff, *Mengenlehre*, S. 150.

und $N.U(A;\varepsilon)=0$. Aus $\overline{AA'}<\varepsilon$ und $\overline{BB'}<\varepsilon$ folgt dann $M.A'=0$ und $N\cdot B'=0$.

Beweis von 2): Wir machen Gebrauch von der bekannten Tatsache, dass es zu jeder Menge M eines kompakten Raumes und jedem $\varepsilon>0$ eine endliche Teilmenge E von M gibt, so dass $M\subset U(E;\varepsilon)$. Demgemäss bestimmen wir zwei endliche Menge P und Q, so dass

$$P\subset R-B\subset U\left(P;\frac{\varepsilon}{2}\right),\quad Q\subset R-A\subset U\left(Q;\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{12}$$

Setzen wir

$$M=P+(R-U(B;\varepsilon)),\quad N=Q+(R-U(A;\varepsilon)),$$

so sind die Mengen M und N abgeschlossen, und durch $A|B$ getrennt. Für jeden Schnitt $A'|B'$ der Umgebung $\mathfrak{U}_{M,N}$ wo etwa $M\cdot B'=0$, $N\cdot A'=0$, haben wir dann:

$$A'\subset U(A;\varepsilon),\quad B'\subset U(B;\varepsilon)$$

und wegen $P\subset A'$, $Q\subset B'$ nach (12):

$$A=\overline{R-B}\subset U(P;\varepsilon)\subset U(A';\varepsilon),\quad B=\overline{R-A}\subset U(Q;\varepsilon)\subset U(B';\varepsilon).$$

Die letzten zwei Formelnsysteme ergeben zusammen: $\overline{AA'}<\varepsilon$, $\overline{BB'}<\varepsilon$.

Damit ist also bewiesen, dass $\mathfrak{S}(R)$ als Teilmenge des Raumes $\Pi(R)$ aller Paare (A,B) aufgefasst werden kann. Zu zeigen bleibt, dass diese Teilmenge ein G_δ ist. Bemerken wir zunächst, dass die Bedingungen (1), welche unter den sämtlichen Paaren (A,B) die Schnitte charakterisieren, mit dem folgenden System äquivalent sind:

$$A+B=R \tag{13 a}$$

$$\overline{R-A}\supset B,\quad \overline{R-B}\supset A. \tag{13 b}$$

Die Beziehungen $\overline{R-A}\subset B$, $\overline{R-B}\subset A$ folgen nämlich aus (13a). Ist $\mathfrak{B}_1$ die Menge aller Paare (A,B), die der Bedingung (13a) und $\mathfrak{B}_2$ die Menge aller Paare, die der Bedingung (13b) genügen, so ist $\mathfrak{S}(R)$ der Durchschnitt von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ und wir brauchen bloss zu zeigen, dass $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ G_δ-Mengen sind. Nun ist $\mathfrak{B}_1$ sogar abgeschlossen [15]); konvergiert nämlich im Raum $\Pi(R)$ die Folge (A_n,B_n) $(n=1,2,\ldots)$ gegen (A,B), so ist, wie man leicht sieht, im Hausdorffschen Raum $A+B=\mathrm{Lim}(A_n+B_n)$. Aus $A_n+B_n=R$ folgt daher $A+B=R$.

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{B}_2$ ein G_δ ist, verstehen wir für $n=1,2,\ldots$ unter $\mathfrak{G}_n$ die Menge aller Paare (A,B), für die:

$$A\subset U(R-B;1/n),\quad B\subset U(R-A;1/n). \tag{14}$$

Dann ist offenbar $\mathfrak{B}_2$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{G}_n$, und alles ist bewiesen, sobald wir zeigen, dass für jedes n $\mathfrak{G}_n$ eine offene Menge ist. Angenommen, dies wäre für ein gewisses n nicht der Fall, so gäbe es ein Paar (A,B) mit der Eigenschaft (14) und eine Folge (A_m,B_m) $(m=1,2,\ldots)$, wo etwa

$$A=\mathrm{Lim}\,A_m,\quad B=\mathrm{Lim}\,B_m,\quad A_m\cdot[R-U(R-B_m;1/n)]\neq 0. \tag{15}$$

[15]) Im metrischen Raum ist jede abgeschlossene Menge ein G_δ.

Ist p_m $(m = 1, 2, \ldots)$ ein Punkt aus $A_m \cdot [R - U(R - B_m; 1/n)]$ und p ein Häufungspunkt der Folge p_m, so liegt nach (15) p in A, und nach (14) gibt es somit einen Punkt q aus $R - B$, so dass $\overline{p, q} < 1/n$; dann ist

(16) $$\overline{p_m, q} < 1/n \quad \text{(für unendlich viele } m).$$

Für genügend grosse Werte von m liegt q in $R - B_m$, denn aus $q \subset B_m$ (für unendlich viele Werte von m) würde nach (15) folgen: $q \subset B$. Die Beziehung (16) ergibt also für unendlich viele m: $p_m \subset U(R - B_m; 1/n)$, während doch p_m als ein Punkt von $R - U(R - B_m; 1/n)$ gewählt war. Widerspruch!

Sur une certaine suite infinie de fonctions d'une variable réelle.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

En m'occupant d'un problème posé par M. Ruziewicz et en connexion avec un théorème que j'ai trouvé avec Mlle Braun [1]), j'ai démontré, comme conséquence d'un autre théorème, le théorème suivant [2]):

Théorème. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une suite infinie de fonctions univoques d'une variable réelle* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, *telle que, quel que soit l'ensemble non dénombrable* N *de nombres réels, toutes les fonctions de notre suite, sauf peut être un nombre fini d'entre elles, transforment* N *en l'ensemble de tous les nombres réels.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration directe de ce théorème.

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Il existe donc une suite transfinie du type Ω,

(1) $$x_\omega, x_{\omega+1}, x_{\omega+2}, \ldots, x_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

formée de tous les nombres réels différents.

L'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels, ainsi que l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels ayant la puissance du continu, donc, d'après notre hypothèse, la puissance $\aleph_1$, il résulte tout de suite de la formule $\aleph_1^2 = \aleph_1$ qu'il existe une correspondance, d'après laquelle à tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ cor-

[1]) *Fund. Math.* t. XIX, p. 2 (Proposition (R)).
[2]) *Bulletin de l'Académie Royale Serbe*, séance du 9 mai 1932.