Über die Urysohnschen Konstanten.

Von

Paul Alexandroff (Moskau).

(Aus einem Briefe an Herrn S. Mazurkiewicz).

Ihre Arbeit „*Sur les composants dimensionnels d'un espace compact*" (Fund. Math. 19 (1932), SS. 243—246) schließen Sie mit den Worten:

„Remarquons que l'extension de notre théorème au cas de la dimension mod m serait immédiate, si l'on savait définir pour la dimension mod m des constantes analogues aux constantes d'Urysohn".

Ihrer in diesen Worten enthaltenen Anregung folgend will ich nun *eine für alle auf dem Homologiebegriff fussenden Dimensionsbegriffe gültige Defintion der Urysohnschen Konstanten geben.* Dadurch wird auch Ihr Satz für alle diese Dimensionsbegriffe bewiesen.

Ich will die Definition diesmal wirklich in voller Allgemeinheit aufstellen, in einer noch größeren Allgemeinheit, als ich es in meiner „*Dimensionstheorie*" (Math. Ann., 106) gemacht habe — die neuere Entwicklung der Topologie zeigt, daß man die Begriffe doch ganz allgemein fassen soll, wenn man sie nicht bei jeder weiteren Untersuchung immer auf's neue verallgemeinern müssen will. Ich werde darauf noch zurückkommen.

Es sei $\mathfrak{J}$ eine beliebige Abelsche Gruppe; die Gruppenoperation in $\mathfrak{J}$ fassen wir als Addition auf. Die Elemente von $\mathfrak{J}$ treten im folgenden als Koeffizienten verschiedener Linearformen auf, so daß wir $\mathfrak{J}$ den *Koeffizientenbereich* (der betreffenden topologischen Theorie) nennen.

Sodann gehen die Begriffsbildungen der kombinatorischen Topologie ihren zwangsmässigen Gang [1]): eine Linearform $\Sigma t^i x_i$ in orientierten Simplexen x_i des gegebenen Eckpunktbereiches mit Koeffizienten t^i aus $\mathfrak{J}$ heißt ein algebraischer Komplex dieses Koeffizientenbereiches [2]). Es ist allerding zu bemerken, daß wenn $\mathfrak{J}$ kein als die *Eins* ausgezeichnete Element besitzt, ein orientiertes Simplex und ein orientierter Komplex (d. h. ein System von orientierten Simplexen) kein algebraischer Komplex des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ ist, was eine kleine Vorsichtsmaßnahme bei der Definition des Randes erfordert (auf die ich von den Herren Hopf und Pontrjagin aufmerksam gemacht worden bin): ist $x^n = (a_0 \dots a_n)$ ein orientiertes Simplex und bezeichnet x_i^{n-1} die orientierte Seite $(-1)^i (a_0 \dots a_{i-1}\, a_{i+1} \dots a_n)$ von x^n (wobei $(-1)^i$ lediglich als Zeichen dessen dient, daß für ein gerades i die Orientierung von x_i^{n-1} durch die Reihenfolge $a_0 \dots a_{i-1}\, a_{i+1} \dots a_n$, für ein ungerades i durch eine aus $a_0 \dots a_{i-1}\, a_{i+1} \dots a_n$ mittels einer ungeraden Permutation entstehende Reihenfolge gegeben ist), so ist bei jeder Wahl der Koeffizienten t aus $\mathfrak{J}$ als Rand von tx^n der algebraische Komplex

$$t\dot{x}^n = t x_0^{n-1} + \dots + t x_n^{n-1}$$

definiert, was dann durch einfache Addition auch den Rand eines beliebigen algebraischen Komplexes $\Sigma t^i x_i$ des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ ergibt.

Sobald man die Definitionen des algebraischen Komplexes und des Randes in bezug auf den Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ hat, hat man auch den Begriff des Zyklus, der Homologie u. s. w.

Diese Begriffe übertragen sich dann in bekannter Weise auf beliebige kompakte metrische Räume, ja sogar — wie aus den neuesten Untersuchungen von Herr Čech folgt — auf noch viel allgemeinere Räume. Das alles ist bekannt; ich will nur ordnungshalber erwähnen, daß man unter einem *wahren Zyklus des kompakten metrischen Raumes F und des Koeffizientenbereiches* $\mathfrak{J}$ eine Folge

$$Z^r = (z_1^r, z_2^r, \dots, z_k^r, \dots) \tag{1}$$

versteht, wobei z_k^r ein δ_k-Zyklus in F des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$ ist.

[1]) Vgl. mein kleines Buch „*Einfachste Grundbegriffe der Topologie*", Berlin, Springer 1932, Kap. II, insbesondere SS. 24, Anm. 23 und SS. 34—35, Anm. 40.

[2]) Dabei ist stets $(-t)x = t(-x)$ zu setzen.

Ferner hat man automatisch den Begriff eines *Trägers* eines wahren Zyklus, den Begriff eines *wesentlichen* Zyklus und schliesslich den *Dimensionsbegriff in bezug auf den Koeffizientenbereich* $\mathfrak{J}$: die Dimension $\Delta_{\mathfrak{J}}(F)$ von F in bezug auf $\mathfrak{J}$ ist die größte Zahl r von der Eigenschaft, daß es in F einen berandenden wesentlichen $r-1$-dimensionalen wahren Zyklus des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ gibt [1]).

Der Brouwersche Dimensionsbegriff dim F scheint zunächst sich in diese Theorie nicht einzuordnen; bekanntlich erhält man ihn erst, wenn man Zyklen *nach variablem Modul* heranzieht. Es erscheint somit als zweckmäßig, noch einen weiteren Schritt in die Allgemeinheit zu tun und neben den wahren Zyklen eines festen Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ wahre Zyklen *nach variablem Koeffizientenbereich* zu betrachten. Unter einem solchen wird man zwangsläufig eine Folge

$$Z^r = (z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots)$$

verstehen, wobei z_k^r ein δ_k-Zyklus des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}_k$ ist (und $\mathfrak{J}_k$ sich im allgemeinen mit k ändert).

Alle Begriffe, die man auf diese Weise erhält, müßen einmal untersucht werden *in der Hoffnung, daß sie durchaus keinen Wirrwarr unzusammenhängender Verallgemeinerungen, sondern ein ziemlich abgeschloßenes und harmonisches Ganzes darstellen, daß sich höchst wahrscheinlich nach wenigen allgemeinen Richtungslinien systematisieren läßt.* Die allgemeinsten *geometrischen Dimensionen*, die hier aufgestellt worden sind, werden sich wahrscheinlich auch axiomatisieren lassen (vielleicht genügen hierzu schon die Ansätze, die ich im letzten Paragraphen meiner „Dimensionstheorie" gemacht habe). Die erste Frage, die hier zu beantworten wäre, ist ob nicht für jeden Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ es eine höchstens abzählbare Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ derart gibt, daß $\Delta_{\mathfrak{J}}(F) = \Delta_{\mathfrak{A}}(F)$ ist (wenigstens für den Fall, daß man unter F nur kompakte abgeschlossene Mengen der Euklidischen Räume versteht), daß sich also — in dem, was die Dimensionsbegriff betrifft — alle Koeffizientenbereiche auf höchstens abzählbare Koeffizientenbereiche zurückführen lassen.

In dieser Zurückführung verschiedener Koeffizientenbereiche aufeinander, insbesondere aber in der Zurückführung variabler Koeffizientenbereiche auf konstante ist einstweilen nur noch ein einziges Resultat erhalten, nämlich der folgende noch nicht publizierte

[1]) Vgl. über diese Begriffe meine *„Dimensionstheorie"*, S. 190.

Satz von Pontrjagin. *Der Brouwersche Dimensionsbegriff ist für alle $F \subset R^n$ identisch mit dem Dimensionsbegriff in bezug auf die additive Gruppe der modulo* 1 *reduzierten rationalen Zahlen.*

Zusatz. Man erhält denselben Dimensionsbegriff, wenn man als Koeffizientenbereich die additive Gruppe der modulo 1 reduzierten rellen Zahlen wählt [1]).

Jetzt gehe ich aber endlich zur Aufstellung des Begriffes der *Urysohnschen Konstanten* für jeden geometrischen Dimensionsbegriff über. F soll im folgenden eine abgeschloßene kompakte Menge eines festen R^n sein.

Es seien: Z ein wesentlicher wahrer Zyklus der Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ in F, $F' \subset F$ irgendein Träger von Z, in welchem Z nicht homolog Null ist. Wir bezeichnen mit d eine beliebige positive Zahl von der Eigenschaft, daß Z in der Umgebung $\overline{U}(F', d)$ noch immer nicht homolog Null ist (in bezug auf $\mathfrak{J}$). *Die Umgebung $U(F', d)$ wird dabei in bezug auf den R^n, in dem F liegt genommen.* Die obere Grenze aller Zahlen d bezeichnen wir mit $d(Z, F')$; ferner betrachten wir die obere Grenze $d(Z)$ der Zahlen $d(Z, F')$, wenn F' alle Träger des Zyklus Z in F durchläuft; die Zahl $d(Z)$ bezeichnen wir als die *Wesentlichkeitsschranke* des wahren Zyklus Z der abgeschlossenen Menge F. Falls Z unwesentich ist, setzen wir $d(Z) = 0$. Die obere Grenze $u_{\mathfrak{J}}^r(F)$ der Wesentlichkeitsschranken aller berandenden $r-1$-dimensionalen wahren Zyklen der Menge F und des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ nennen wir die *r-te* (oder *r-dimensionale*) *Urysohnsche Konstante von F* in bezug auf $\mathfrak{J}$.

[1]) Herr Pontrjagin nennt diesen Koeffizientenbereich den *Koeffizientenbereich modulo* 1, so daß man jetzt die Brouwersche Dimension nicht nur die *Dimension nach variablem Modul*, sondern auch die *Dimension modulo* 1 nennen könnte. Eine noch zu lösende Frage wäre: ist nicht jeder geometrische Dimensionsbegriff gleich dem Dimensionsbegriff nach einer Untergruppe des Koeffizientenbereiches modulo 1? Stimmt ferner die Dimension in bezug auf eine *endliche Abelsche Gruppe* nicht notwendig mit einer der Dimensionen module m, $m \geqslant 2$, überein? Das sind Beispiele von Fragen, die ich mir als Bestandteile der allgemeinen Fragestellung der Systematisierung der verschiedenen Dimensionsbegriffe denke.

Die obere Grenze $u^r_\omega(F)$ der Wesentlichkeitsschranken aller berandenden $r-1$-dimensionalen wahren Zyklen nach variablem Modul der Raumes F bezeichnen wir $u^r_\omega(F)$.

Ist F eine kompakte abgeschlossene Menge der Euklidischen R^n oder des Hilbertschen Raumes R^∞, so folgt nach bekannten dimensionstheoretischen Schlußweisen [1]), daß man durch keine ε-Überführung der Menge F mit $\varepsilon < u^r_\mathfrak{J}(F)$ eine Menge F' mit $\Delta_\mathfrak{J}(F') < r$ erhalten kann. Wenn man also mit $\bar{u}^r_\mathfrak{J}(F)$ bzw. $\bar{u}^r(F)$ die untere Grenze der positiven Zahlen ε bezeichnet, für die es eine ε-Überführung f_ε mit

$$(2) \qquad \Delta_\mathfrak{J}(f_\varepsilon(F)) < r \quad \text{bzw.} \quad \dim(f_\varepsilon(F)) < r$$

gibt, so ist

$$(3) \qquad u^r_\mathfrak{J}(F) \leqslant \bar{u}^r_\mathfrak{J}(F) \quad \text{bzw.} \quad u^r_\omega \leqslant \bar{u}^r(F)\ ^{2})\text{.}$$

Bezeichnet man schließlich mit $u^r(F)$ die r-dimensionale Urysohnsche Konstante von F wie sie von Urysohn selbst in Fund. Math. 8, S. 352 definiert war, so folgt aus dem sogenannten dimensionstheoretischen Überführungssatz und seinen Zusätzen [3]), daß $\bar{u}^r_\omega(F) \leqslant u^r(F)$, andererseits aber $u^r(F) \leqslant 3\bar{u}^r(F)$ ist, so daß man in allen Untersuchungen $u^r(F)$ durch die vielleicht anschaulichere Konstante $\bar{u}^r(F)$, aber auch umgekehrt, $\bar{u}^r_\omega(F)$ durch $u^r(F)$ ersetzen kann.

Was die exakten Beziehungen zwischen $u^r_\mathfrak{J}(F)$ und $\bar{u}^r_\mathfrak{J}(F)$ betrifft, so ist mir auch im Falle des Brouwerschen Dimensionsbegriffes außer der Ungleichung (3) nichts bekannt. Wir werden aber gleich sehen, daß nicht nur im Falle der Brouwerschen Dimension (d. h. der Zyklen nach variablem Modul), sondern auch für jeden Koeffizientenbereich die hier als Urysohnsche Konstanten eingeführten Zahlen all das leisten, was seinerzeit den Zweck der Einführung der ursprünglichen Urysohnschen Konstanten bildete [4]). Und zwar gilt dies auf Grund der folgenden Sätze.

[1]) Vgl. „*Dimensionstheorie*“, S. 185, Korollar.

[2]) Analoges gilt auch für *ε-Abbildungen* (Vgl. meine Arbeit „*Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen*“ (Annals of math. (2) 30, 1929, SS. 101—187).

[3]) *Gestalt u. Lage*, Kap. I, SS. 118, 121.

[4]) Was den anschaulichen Inhalt der Konstanten $u^r_\mathfrak{J}(F)$ betrifft, so möchte ich nur bemerken, daß wenn z. B. F ein See ist, so ist $u^2_\mathfrak{J}(F)$ (wobei $\mathfrak{J}$ irgendeinen der üblichen Koeffizientenbereiche bezeichnet) die Hälfte der Zahl, die der „Mensch auf der Straße“ als die *Breite* des Sees bezeichnet. Im Fall wenn F eine Kreisscheibe ist, so ist $u^2_\mathfrak{J}(F)$ der Radius; falls F ein Rechteck ist, so ist $u^2_\mathfrak{J}(F)$ die Hälfte seiner kleineren Seite usw.

Satz I. *Ist $\Delta_\mathfrak{J}(F) = r$, so ist für $i \leqslant r$*

$$u^i_\mathfrak{J}(F) \neq 0,$$

für $i > r$ dagegen

$$u^i_\mathfrak{J}(F) = 0.$$

Satz II. *Ist*

$$(4) \qquad F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_h \supset \ldots, \quad F_\omega = \Pi F_h$$

und $\Delta_\mathfrak{J}(F) = r$, so ist $\Delta_\mathfrak{J}(F_\omega) = r$ dann und nur dann, wenn $\lim\limits_{h\to\infty} u^r_\mathfrak{J}(F_h) = \sigma > 0$ ist [1]).

Satz III. *Es seien F_1 und F_2 zwei abgeschlossene Mengen. Ist $\Delta_\mathfrak{J}(F_1 \cdot F_2) \leqslant r-2$, so ist $u^r_\mathfrak{J}(F_1 + F_2)$ gleich der größten der beiden Zahlen $u^r_\mathfrak{J}(F_1)$ und $u^r_\mathfrak{J}(F_2)$.*

Der Satz I folgt unmittelbar aus den Definitionen und dem Satz von Nr. 35 der „*Dimensionstheorie*“ S. 190.

Wir gehen zum Beweise der Sätze II und III über.

Beweis des Satzes II. Ist $\Delta_\mathfrak{J}(F_\omega) = r$, so ist

$$u^r_\mathfrak{J}(F_\omega) = \alpha > 0,$$

folglich bei jedem h

$$u^r_\mathfrak{J}(F_h) \geqslant \alpha$$

und somit

$$\lim_{h\to\infty} u^r_\mathfrak{J}(F_h) \geqslant \alpha > 0.$$

Es sei umgekehrt $\lim\limits_{h\to\infty} u^r_\mathfrak{J}(F_h) > 0$. Dann kann man die positive Zahl σ so wählen, daß für alle h man $u^r_\mathfrak{J}(F_h) \geqslant \sigma$ hat. Wir beweisen daß unter diesen Umständen auch

$$(5) \qquad u^r_\mathfrak{J}(F_\omega) \geqslant \sigma$$

[1]) Daß $\lim u^r_\mathfrak{J}(F_h)$ überhaupt existiert, folgt daraus, daß für $F' \subset F$ offenbar $u^r_\mathfrak{J}(F') \leqslant u^r_\mathfrak{J}(F)$ ist.

ist (was offenbar eine kleine Verschärfung des Satzes II darstellt).

Es sei η beliebig klein und positiv. In jedem F_h gibt es einen $r-1$-dimensionalen wahren Zyklus

$$Z_h^{r-1} = (z_1^{(h)}, z_2^{(h)}, \ldots, z_k^{(h)}, \ldots)\ ^{1)}$$

und zu diesem einen Träger $\Phi_h \subset F_h$ von der Eigenschaft, daß Z_h^{r-1} in $U(\Phi_h, \sigma - \eta)$ nicht berandet, während andererseits

$$Z_h^{r-1} \sim 0 \quad \text{in } F_h \quad (\text{in bezug auf } \mathfrak{J})$$

ist. Offenbar können wir annehmen, daß die Φ_h eine konvergente Mengenfolge mit dem topologischen Limes $\Phi_\omega \subset F_\omega$ bilden. Wir wählen jetzt für jedes h die natürliche Zahl k_h so groß, daß der Feinheitsgrad von $z_{k_h}^{(h)}$ kleiner als $\frac{1}{h}$ ist, und daß $z_{k_h}^{(h)}$ in F_h einen $\frac{1}{h}$-Komplex (des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$) berandet. Setzen wir schließlich einfachheitshalber $z_h^{r-1} = z_{k_h}^{(h)}$, so ist

$$Z^{r-1} = (z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \ldots, z_h^{r-1}, \ldots)$$

ein wahrer Zyklus, von dem wir — nach eventueller „unendlich — kleiner Verschiebung“ [2]) annehmen dürfen, daß er zu Φ_ω gehört. Da z_h^{r-1} in F_h einen $\frac{1}{h}$-Komplex berandet, berandet Z^{r-1} auch in F_ω.

Ist h hinreichend groß, so liegt $U(\Phi_\omega, \sigma - 2\eta)$ in $U(\Phi_h, \sigma - \eta)$. Da $z_h^{r-1} = z_{k_h}^{(h)}$ in $U(\Phi_h, \sigma - \eta)$ nicht berandet, berandet z_h^{r-1} — also auch Z^{r-1} — in $U(\Phi_\omega, \sigma - 2\eta)$ nicht, d. h. die Wesentlichkeitsschranke von Z^{r-1} ist $\geqslant \sigma$, so daß $u_{\mathfrak{J}}^r(F_\omega) \geqslant \sigma$ ist, w. z. b. w.

B e m e r k u n g. In der obigen Überlegung ist enthalten, daß für $\lim\limits_{h\to\infty} u_{\mathfrak{J}}(F_h) = 0$ auch $u_{\mathfrak{J}}(F_\omega) = 0$ ist, während für $\lim u_{\mathfrak{J}}(F_h) = \alpha > 0$ die Ungleichung

$$u_{\mathfrak{J}}(F_\omega) \geqslant \alpha$$

[1]) das eingeklammerte h oben ist ein Index, keine Dimensionszahl! (alle z_h^k sind ja $r-1$-dimensional).

[2]) „*Dimensionstheorie*“. Nr. 24 (S. 180).

besteht. Da offenbar

$$u_{\mathfrak{J}}(F_\omega) \leqslant \lim u_{\mathfrak{J}}(F_h)$$

ist, gilt ganz allgemein.

Satz II'. *Ist*

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_h \supset \ldots$$

mit $F_\omega = \Pi F_h$, *so ist*

$$u_{\mathfrak{J}}^r(F_\omega) = \lim_{h\to\infty} u_{\mathfrak{J}}^r(F_h).$$

B e w e i s d e s S a t z e s III. Es sei d die größte unter den beiden Zahlen $u_{\mathfrak{J}}^r(F_1)$ und $u_{\mathfrak{J}}^r(F_2)$. Wir wählen einen beliebigen $r-1$-dimensionalen berandenden wahren Zyklus

$$Z^{r-1} = (z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \ldots, z_k^{r-1}, \ldots)$$

des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ in $F_1 + F_2$ mit einem Träger $F' \subset \subset F_1 + F_2$ und ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Wir beweisen, daß Z^{r-1} in $U(F', d + \varepsilon)$ berandet.

Es sei c_k' der aus allen zu F_1 gehörenden Simplexen von z_k^{r-1} aufgebaute Komplex; c_k'' sei der Rest von z_k^{r-1} [1]).

Wenn wir den Rand eines algebraischen Komplexes C immer mit $\dot{C}$ bezeichnen, so gilt

$$\dot{c}_k' = -\dot{c}_k'' = z_k^{r-2}.$$

Der Zyklus

$$Z^{r-2} = (z_1^{r-2}, z_2^{r-2}, \ldots, z_k^{r-2}, \ldots)$$

gehört zu $F_1 \cdot F_2$, ist also bestimmt unwesentlich; da auch F'' ein Träger von Z^{r-2} ist, gibt es somit ε_k-Komplexe $(\lim\limits_{k\to 0} \varepsilon_k = 0)$ c_k^{r-1} in $F_1 \cdot F_2$, die durch z_k^{r-2} berandet und in $U(F'', \varepsilon)$ enthalten sind.

Wir setzen nun

$$z_k = c_k - c_k^{r-1}, \quad z_k'' = c_k'' + c_k^{r-1}$$

und betrachten die wahren $r-1$-dimensionalen Zyklen

$$Z_1^{r-1} = (z_1', z_2', \ldots, z_k', \ldots)$$

[1]) Selbstverständlich werden alle Simplexe von c_k' bezw. c_k'' mit den ihnen in z_k^{r-1} zukommenden Koeffizienten gezählt.

und

$$Z_2^{r-1} = (z_1'', z_2'', \ldots, z_k'', \ldots)$$

von F_1 bzw. F_2.

Ich behaupte zunächst, daß diese Zyklen in F_1 bzw. F_2 beranden. Es genügt diese Behauptung für Z_1^{r-1} nachzuweisen. Da Z^{r-1} in $F_1 + F_2$ berandet, so gibt es ε_k'-Komplexe, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k' = 0$, C_k^r in $F_1 + F_2$ mit $\dot{C}_k^r = z_k^{r-1}$.

Wir bezeichnen wieder mit C_k' den auf F_1 liegenden Teil des Komplexes C_k^r. Es ist

$$\dot{C}_k' = c_k' + \breve{c}_k^{r-1}$$

mit $\breve{c}_k^{r-1}$ in $F_1 \cdot F_2$ und

$$\dot{\breve{c}}_k^{r-1} = -\dot{c}_k' = -z_k^{r-2},$$

folglich $\dot{\breve{c}}_k^{r-1} = -\dot{c}_k^{r-1}$, so daß $\breve{z}_k^{r-1} = \breve{c}_k^{r-1} + c_k^{r-1}$ ein ε_k''-Zyklus in $F_1 \cdot F_2$ ist. Da

$$(\breve{z}_1^{r-1}, \breve{z}_2^{r-1}, \ldots, \breve{z}_k^{r-1}, \ldots)$$

unwesentlich ist, also in $F_1 \cdot F_2$ beranden muß, gibt es ε_k'''-Komplexe c_k^r in $F_1 \cdot F_2$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k''' = 0$ und

$$\dot{c}_k^r = c_k^{r-1} + \breve{c}_k^{r-1}.$$

Sodann ist also:

$$(C_k' - c_k^r)^{\cdot} = c_k' + \breve{c}_k^{r-1} - \breve{c}_k^{r-1} - c_k^{r-1} = c_k - c_k^{r-1} = z_k'$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

Da die Simplexe von c_k' gleichzeitig zu F_1 und F' und die von c_k^{r-1} zu $F_1 \cdot F_2$ und $U(F', \varepsilon)$ gehören, ist $F_1 \cdot \overline{U}(F', \varepsilon)$ ein Träger des zu F_1 gehörenden Zyklus Z_1^{r-1}. Dieser Zyklus muss also in einer $(d+\varepsilon)$-Umgebung des soeben genannten Trägers, also in $U(F', d+2\varepsilon)$ beranden. In derselben Weise muss auch Z_2^{r-1} in $U(F', d+2\varepsilon)$ beranden. Da aber $z_k^{r-1} = z_k' + z_k''$ ist, bedeutet das, daß auch Z^{r-1} in $U(F', d+2\varepsilon)$ beranden muss, womit der Satz III bewiesen ist.

Hiermit ist aber auch Ihr Satz für jeden Koeffizientenbereich bewiesen, d. h. es gilt:

Ist $F \subset R^n$ eine kompakte abgeschlossene Menge, so ist die Menge ihrer dimensionellen Komponenten in bezug auf irgendeinen geometrischen Dimensionsbegriff endlich, abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Zum Schluss möchte ich noch einige Bemerkungen über eventuelle Verallgemeinerungen des Satzes III machen. Macht man keine einschränkenden Voraussetzungen über die Mengen F_1, F_2, $F_1 \cdot F_2$, so hat man keine Aussicht für irgendeinen „Additionssatz" bezüglich der Urysohnschen Konstanten, denn schon die einfachsten Beispiele lehren, daß man das Einheitsquadrat Q — also eine Menge F mit $u_{\mathfrak{J}}^2(F) = \frac{1}{2}$ — in zwei Mengen F_1 und F_2 zerlegen kann mit $u_{\mathfrak{J}}^2(F_1) < \varepsilon$, $u_{\mathfrak{J}}^2(F_2) < \varepsilon$, wobei ε beliebig klein gewählt werden kann: es genügt für F_1 die Summe von endlich-vielen im Quadrat Q hinreichend „dicht" gelegenen kleinen Quadraten, für F_2 die abgeschlossene Hülle des Komplements $Q - F_1$ zu wählen [1]).

Dagegen gilt der

Satz IV. *Es seien F_1 und F_2 abgeschlossene Mengen, in denen jeder wahre Zyklus der Dimensionszahl $r-1$ (und des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$) berandet. Falls in $F_1 \cdot F_2$ jeder $r-2$-dimensionale wahre Zyklus (der Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$) berandet, so gilt*

$$u_{\mathfrak{J}}^r(F_1 + F_2) \leqslant u_{\mathfrak{J}}^{r-1}(F_1 \cdot F_2) + \max\left(u_{\mathfrak{J}}^r(F_1),\ u_{\mathfrak{J}}^r(F_2)\right) \tag{6}$$

Insbesondere gilt also die Formel (6), wenn in F_1, F_2 und in $F_1 \cdot F_2$ jeder Zyklus des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ berandet.

Beweis des Satzes IV. Es haben d, F',

$$Z^{r-1} = (z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \ldots, z_k^{r-1}),$$

c_k', c_k'', z_k^{r-2} dieselbe Bedeutung wie beim Beweise des Satzes III. Wir bezeichnen mit e die Zahl $u_{\mathfrak{J}}^{r-1}(F_1 \cdot F_2)$. Sodann gibt es Komplexe c_k^{r-1} mit $\dot{c}_k^{r-1} = z_k^{r-2}$ in der $(e+\varepsilon)$-Umgebung des Trägers $F_1 \cdot F_2 \cdot \overline{U}(F', \varepsilon)$ von

$$Z^{r-2} = (z_1^{r-2}, z_2^{r-2}, \ldots, z_k^{r-2}, \ldots).$$

Wir setzen

$$z_k' = c_k' - c_k^{r-1}, \quad z_k'' = c_k'' + c_k^{r-1}$$

und betrachten den wahren Zyklus von F_1

$$Z_1^{r-1} = (z_1', z_2', \ldots, z_k', \ldots).$$

[1]) Man erhält F_1 und F_2 wenn man das zur Konstruktion der Sierpińskischen Universalkurve führende Approximationsverfahren hinreichend weit fortsetzt.

Er hat die Menge $F_1 \cdot (F'' + \overline{U}(F', e + \varepsilon))$ zu seinen Träger, berandet also in der $(d + \varepsilon)$-Umgebung dieses Trägers, d. h. jedenfalls in $U(F', d + e + 2\varepsilon)$. Ebenso beweist man, daß der wahre Zyklus

$$Z_2^{r-1} = (z_1'', z_2'', \ldots, z_k'', \ldots)$$

in $U(F', d + e + 2\varepsilon)$ berandet. Da $z_k^{r-1} = z_k + z_k'$ ist, muß auch Z^{r-1} in $U(F', d + e + 2\varepsilon)$ beranden, w. z. b. w.

Ganz elementare Beispiele machen den anschaulichen Inhalt dieses Satzes klar.

Ascona (Lago Maggiore), 15. X. 1932.

Über Schnitte in topologischen Räumen.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

Sei R ein separabler metrisierbarer topologischer Raum [1]). Ein Paar von nicht-leeren Teilmengen A und B von R mit den Eigenschaften:

$$(1) \qquad \overline{R - A} = B, \quad \overline{R - B} = A \text{ [1a])}$$

nennen wir einen *Schnitt* des Raumes R [2]) und verwenden dafür die Bezeichnung $A|B$ (Auf die Reihenfolge der Mengen wird keine Rücksicht genommen: $A|B \equiv B|A$!).

Aus 1. folgt leicht:

$$(2) \qquad A + B = R.$$

Ferner ergibt sich aus 1., dass die Mengen A und B abgeschlossen sind. Die gleichfalls abgeschlossene (eventuell leere) Menge $A \cdot B$ heisst die *Randmenge* des Schnittes $A|B$. Von zwei Mengen M und N sagen wir, sie seien durch den Schnitt $A|B$ *getrennt*, wenn bei geeigneter Bezeichnung:

$$(3) \qquad M \cdot B = 0, \quad N \cdot A = 0$$

[1]) Von den dimensionstheoretischen Anwendungen abgesehen, gelten die folgenden Überlegungen allgemeiner für *normale* (nicht notwendig separable) topologische Räume.

[1a]) Mit $\overline{M}$ wird wie üblich die *abgeschlossene Hülle* der Menge M bezeichnet.

[2]) In meiner Note in Proc. Ac. Amst. 29 (1926), S. 163 wurde der Schnitt als ein System aus *drei* paarweise fremden Mengen E_1, E_2, F erklärt, wo $R = E_1 + E_2 + F$, $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$ und F gemeinsame Begrenzung von E_1 und E_2 ist. Der Unterschied zwischen den beiden Definitionen ist rein formal. Der gegenseitige Übergang wird durch die Formeln vermittelt: $E_1 = R - A$, $E_2 = R - B$, $F = A . B$ und umgekehrt: $A = E_2 + F$, $B = E_1 + F$.