Sur l'ensemble de valeurs d'une fonction mesurable à valeurs distinctes.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble linéaire soit l'ensemble de toutes les valeurs d'une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes mesurable (L), resp. mesurable (B).

I. Mesurabilité (L).

Théorème I. *Pour qu'un ensemble linéaire soit un ensemble de valeurs d'une fonction mesurable d'une variable réelle à valeurs distinctes, il faut et il suffit qu'il contienne un sous-ensemble parfait.*

Démonstration.

La condition est nécessaire.

En effet, soit $f(x)$ une fonction mesurable d'une variable réelle à valeurs distinctes. D'après un théorème bien connu de M. Lusin, toute fonction mesurable est continue, lorsqu'on néglige un ensemble de mesure aussi petite que l'on veut [1]). Il en résulte tout de suite qu'il existe un ensemble parfait et borné P, tel que la fonction $f(x)$ est continue sur P. Or, comme on sait, une image biunivoque et continue d'un ensemble parfait et borné est un ensemble parfait. L'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ (pour x réels) contient donc un sous-ensemble parfait (l'image $f(P)$ de P), c. q. f. d.

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.*, t. III, p. 320 ou t. IX, p. 122.

La condition est suffisante.

Soit E un ensemble linéaire contenant un sous-ensemble parfait Q. L'ensemble Q étant parfait, il existe, comme on sait, une suite infinie d'ensembles disjoints, parfaits non denses et bornés $Q_0, Q_1, Q_2,\dots$ contenus dans Q.

D'autre part, comme on sait, il existe une suite infinie d'ensembles disjoints, parfaits non denses et bornés $P_1, P_2, P_3,\dots$ tels que l'ensemble R de tous les nombres réels qui n'appartiennent pas à la somme $P_1+P_2+P_3+\dots$ est de mesure nulle et (comme complémentaire d'un ensemble de 1[re] catégorie) de puissance du continu.

Deux ensembles linéaires parfaits non denses et bornés étant, comme on sait, homéomorphes, il existe pour tout indice n une fonction à valeurs distinctes $\varphi_n(x)$ définie et continue dans P_n qui transforme P_n en Q_n. L'ensemble $T=E-(Q_1+Q_2+\dots)$, en tant que contenant l'ensemble parfait Q_0, étant de puissance du continu, ainsi que l'ensemble R, il existe une correspondance biunivoque entre les points de R et ceux de T: soit $\varphi(x)$ la fonction (définie dans R) qui établit cette correspondance.

Posons maintenant

$$f(x)=\varphi_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in P_n \quad (n=1, 2, 3,\dots)$$

et

$$f(x)=\varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in R.$$

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour tous les nombres réels x, et on voit sans peine qu'elle est à valeurs distinctes et que l'ensemble de toutes les valeurs que prend $f(x)$ pour x réels est l'ensemble E.

Or, on voit sans peine que la fonction $f(x)$ est mesurable. En effet, désignons (pour $n=1, 2, 3,\dots$) par $f_n(x)$ la fonction d'une variable réelle, définie comme il suit:

$$f_n(x)=\varphi_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in P_n$$

et

$$f_n(x)=0 \quad \text{pour} \quad x \text{ non } \in P_n.$$

Les fonctions $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3,\dots)$ sont, comme on voit facilement, de classe $\leqslant 1$ de Baire et leur somme

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\dots$$

est une fonction de classe $\leqslant 2$ de Baire. Or, on a évidemment

$$f(x) = F(x) \quad \text{pour} \quad x \in P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

donc la fonction $f(x)$ est égale à $F(x)$ pour tous les x réels sauf peut-être pour les nombres x de l'ensemble R qui est de mesure nulle. La fonction $F(x)$ étant mesurable, nous en concluons que la fonction $f(x)$ est aussi mesurable, c. q. f. d.

Notre théorème est ainsi démontré.

II. Mesurabilité (B).

Théorème II. *Pour qu'un ensemble linéaire soit un ensemble de valeurs d'une fonction représentable analytiquement d'une variable réelle à valeurs distinctes, il faut et il suffit qu'il soit non dénombrable, mesurable* (B).

Démonstration.

La condition est nécessaire.

En effet, soit $f(x)$ une fonction représentable analytiquement d'une variable réelle à valeurs distinctes. Soit H l'image géomètrique de la fonction $f(x)$: cette dernière étant représentable analytiquement, H est, comme j'ai démontré[1]), un ensemble (plan) mesurable (B). Or, l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ pour x réels est évidemment une projection de H (sur l'axe d'ordonnées), où les projections de deux points différents sont toujours distinctes. L'ensemble H étant mesurable (B), il en résulte, d'après un théorème connu de M. Lusin[2]) que l'ensemble E est aussi mesurable (B). Or E, comme ensemble de valeurs d'une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes, est évidemment de la puissance du continu. L'ensemble E est donc non dénombrable et mesurable B, c. q. f. d.

La condition est suffisante.

Soit E un ensemble linéaire non dénombrable mesurable (B). Soit E_1 un sous-ensemble dénombrable de E: l'ensemble $Q = E - E_1$ est évidemment encore non dénombrable et mesurable (B). Désignons par E_2 l'ensemble de tous les points de Q qui sont points

[1]) *Fund. Math.*, t. II, p. 78 (Théorème III).

[2]) *Fund. Math.*, t. X, p. 59.

de condensation de Q et posons $Q - E_2 = E_0$. L'ensemble E_0 est, comme on sait, au plus dénombrable, et E_2 est mesurable (B) et condensé (c'est-à-dire tout point de E_2 est un point de condensation de E_2). D'après un théorème que j'ai démontré[1]), E_2 est une image continue et biunivoque de l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Il existe donc une fonction $\varphi(x)$ définie et continue dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels, à valeurs distinctes et dont l'ensemble de valeurs (pour $x \in N$) est E_2. Or, on a évidemment $E = E_0 + E_1 + E_2$ et l'ensemble $E_0 + E_1$ est dénombrable. Il existe donc une suite infinie

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

formée de tous les nombres de l'ensemble $E_0 + E_1$.

D'autre part, soit

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels. Posons

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \in N$$

et

$$f(x_n) = u_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour tous les nombres x réels et, comme on voit sans peine, elle est à valeurs distinctes, et l'ensemble de valeurs de $f(x)$ (pour x réels) est E. Or, en tant que continue dans l'ensemble de tous les nombres irrationnels, $f(x)$ est une fonction représentable analytiquement (comme on voit sans peine, de classe $\leqslant 2$ de Baire).

Le théorème II est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'en modifiant un peu le raisonnement que j'ai utilisé dans le vol. III des *Fund. Math.*, p. 31 ss., on peut démontrer que *tout ensemble linéaire non dénombrable mesurable* (B) *est l'ensemble de valeurs d'une fonction de Baire de classe* 1 *à valeurs distinctes.*

III. La condition de Baire.

Dans le même ordre d'idées s'impose le problème quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire E soit l'ensemble de toutes

[1]) *Mathematica* (Cluj 1929), t. I, p. 18.

les valeurs d'une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes qui satisfait à la condition de Baire. (On dit qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ satisfait à la condition de Baire, si, quel que soit l'ensemble parfait P, $f(x)$ est continue sur P, lorsqu'on néglige un ensemble de 1[re] catégorie relativement à P)[1]). Nous donnerons ici une solution de ce problème, en admettant l'hypothèse du continu. Nous démontrerons ce

Théorème III. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire soit un ensemble de valeurs d'une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes qui satisfait à la condition de Baire est qu'il contienne un sous-ensemble parfait.*

La nécessité de notre condition résulte tout de suite du fait que si $f(x)$ est une fonction satisfaisant à la condition de Baire, il existe un ensemble complémentaire à un ensemble de 1[re] catégorie de Baire (donc contenant un sous-ensemble parfait) sur lequel $f(x)$ est continue, et du fait qu'une fonction définie et continue sur un ensemble parfait et borné transforme cet ensemble en un ensemble parfait.

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et soit E un ensemble linéaire contenant un sous-ensemble parfait P.

M. Lusin a démontré que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble N de puissance du continu qui est de 1[re] catégorie sur tout ensemble parfait[2]).

Comme on voit sans peine, il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle à valeurs distinctes qui est une fonction de Baire, donc satisfait à la condition de Baire, et dont l'ensemble de valeurs est l'ensemble parfait P.

L'ensemble $\varphi(N)$, donc aussi l'ensemble $Q=(E-P)+\varphi(N)$ est évidemment de puissance du continu, et il existe une fonction $\psi(x)$ qui établit une correspondance biunivoque entre les points de l'ensemble N et ceux de l'ensemble Q. Posons

$$f(x)=\psi(x) \quad \text{pour} \quad x \,\varepsilon\, N$$

et

$$f(x)=\varphi(x) \quad \text{pour} \quad x \text{ non } \varepsilon\, N.$$

L'ensemble N étant de 1[re] catégorie sur tout ensemble parfait et la fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition de Baire, il résulte tout de suite de la définition de la fonction $f(x)$ qu'elle satisfait à la condition de Baire. Or, $f(x)$ est, comme on voit sans peine, une fonction à valeurs distinctes et l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ (pour x réels) est E. Notre théorème III est ainsi démontré.

Il est à remarquer que si l'on savait démontrer notre théorème sans admettre l'hypothèse du continu, il en résulterait tout de suite (sans l'aide de l'hypothèse du continu) que l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle qui satisfont à la condition de Baire a la puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, ce qu'on ne sait pas démontrer sans utiliser l'hypothèse du continu[3]).

[1]) Voir *Fund. Math.*, t. V, p. 20.
[2]) *Comptes rendus* t. 158, p. 1256; cf. *Fund. Math.* t. II, p. 155.
[3]) Cf. *Fund. Math.*, t. IV, p. 368 (Problème 24).

Concerning S-regions in locally connected continua.

By

G. T. Whyburn (Baltimore, U. S. A.).

1. A locally compact connected separable metric space which is locally connected will be called a *locally connected continuum*. Any connected open subset of such a space will be called a *region* in that space; and any region which has property S[1]), i. e., which, for any given $\varepsilon>0$, is the sum of a finite number of connected sets of diameter $<\varepsilon$, will be called an *S-region*.

In this paper a method of construction of S-regions will be given which yields, for any given point p of a locally connected continuum M and for any $\varepsilon>0$ such that the set $V_\varepsilon(p)$ of all points of M at a distance $<\varepsilon$ from p is compact, an S-region R containing p and lying in $V_\varepsilon(p)$. Furthermore, these regions $[R_\varepsilon]$ are monotone increasing in the sense that from $\sigma<\varepsilon$ follows $\overline{R}_\sigma\subset R_\varepsilon$. In view of the fact[2]) that any set having property S is locally connected and if a set S has property S, so also does any set S_0 such that $S\subset S_0\subset\overline{S}$, it follows in particular that each of our sets $\overline{R}_\varepsilon$ is a compact locally connected continuum. Thus we are able to construct, in the neighborhood of any point p of M, an uncountable collection of compact locally connected subcontinua of M containing p and such that for any two of these, one is contained wholly in the interior (rel. M) of the other. This property is applied in § 4 to yield arbitrarily small S-regions containing any point p of a locally connected continuum M and whose exteriors are connected when p

[1]) See Sierpiński, Fund. Math., vol. 1 (1920), p. 44; and R. L. Moore, Fund. Math., vol. 3 (1922), p. 232.
[2]) See Moore, loc. cit.