Sur les ensembles dans lesquels toutes les équations d'une famille donnée ont un nombre de solutions fixé d'avance.

Par

Adolphe Lindenbaum (Varsovie).

§ 1. Introduction.

MM. Banach [1]), Ruziewicz et Sierpiński [2]) se sont occupés récemment de certains problèmes qui, dans leur forme la plus générale, s'énoncent comme il suit:

Etant donnée une famille Φ de transformations de sous-ensembles d'un ensemble Z, trouver:

(a) un *grand* ensemble X contenu dans Z et tel que, pour deux transformations arbitraires, mais différentes: f_1 et f_2 — de famille Φ les ensembles $f_1(X)$ et $f_2(X)$ ne puissent avoir qu'un *petit* ensemble d'éléments communs;

(b) deux *grands* ensembles X et Y contenus dans Z et tels que, pour deux transformations arbitraires (différentes ou non): f_1 et f_2 — de famille Φ, les ensembles $f_1(X)$ et $f_2(Y)$ ne puissent avoir qu'un *petit* ensemble d'éléments communs.

On peut prendre p. ex. comme *grand* ensemble — un ensemble de la même puissance que l'ensemble Z, ou plus généralement: de puissance $\mathfrak{n}$ au moins, $\mathfrak{n}$ étant un nombre cardinal fixe; comme *petit* ensemble — un ensemble de puissance inférieure à une puissance $\mathfrak{m}$ fixe; si Z est un espace topologique, rien n'empêche de

[1]) S. Banach: *Sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. **19** (1932) pp. 10—16.

[2]) S. Ruziewicz et W. Sierpiński: *Sur un ensemble parfait qui a avec toute sa translation au plus un point commun*, Fund. Math. **19** (1932), pp. 17—21.

définir ces deux notions en termes topologiques: p. ex. un ensemble soit *grand,* quand il contient un sous-ensemble parfait. (Comp. la notion de classe régulière — § 2).

Dans l'article présent, nous étudions des problèmes semblables à ceux qui viennent d'être formulés, cependant:

(*a*) quant à la partie commune des ensembles $f_1(X)$ et $f_2(X)$, resp. (*b*) quant à la partie commune des ensembles $f_1(X)$ et $f_2(Y)$,

nous allons exiger non seulement qu'ils soient de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$, mais qu'ils soient *exactement* de puissance $\mathfrak{m}$ (d'ordinaire, $\mathfrak{m} = 1$ présente le cas le plus intéressant).

Il est difficile de choisir de tels énoncés concernant ces questions qui, tout en restant suffisamment généraux, ne soient pas pourtant dépourvus de bon sens au point de vue d'applications. Bornons-nous donc, plutôt à titre d'exemple, à signaler trois lemmes généraux (qui nous paraissent ne pas être excessivement compliqués) et quelques théorèmes assez divers, sans prétendre d'avoir ainsi épuisé le sujet. L'un de ces théorèmes sert à généraliser un résultat nouveau de M. Bieberbach, se rapportant au „treizième problème" de Hilbert (§ 8). Le théorème auxiliaire sur les nombres ordinaux (§ 3) nous paraît aussi intéressant par lui-même.

Les méthodes employées dans cet article (étroitement liées au procédé de recurrence transfinie) ne sont nullement nouvelles (et même bien connues), les raisonnements se montrent assez semblables l'un à l'autre: c'est pourquoi nous avons cru convenable de rédiger bien succinctement les démonstrations et même, de les esquisser parfois en très grandes lignes seulement.

En général, l'axiome du choix nous est indispensable; on peut s'en passer, si p. ex. les éléments de l'espace Z considéré peuvent être effectivement bien ordonnés.

§ 2. Définitions et notations.

Nous désignons par $[x, y]$ — la paire ordonnée composée du premier élément x et du second élément y [3]).

[3]) V. p. ex.:

A. N. Whitehead and B. Russell: *Principia Mathematica*, Vol. I (2. ed. 1925), ∗55 (p. 366) et, en particulier, la définition ∗55·01 (p. 368).

F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), pp. 32—33.

C. Kuratowski: *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles*, Fund. Math. 2 (1921), p. 171.

Z étant un ensemble de certaines paires $[x, y]$, l'ensemble de tous les x pour lesquels il existe un tel y que $[x, y] \in Z$ — sera appelé ***première projection*** de Z; nous définissons pareillement la ***seconde projection*** de Z, comme l'ensemble de tous les y pour lesquels il existe un tel x que $[x, y] \in Z$.

Appelons ***premier*** resp. ***second domaine*** d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ — la première resp. seconde projection de l'ensemble de toutes les paires $[x, y]$ pour lesquelles $f(x, y)$ existe („est défini"). On voit bien que x_0 peut appartenir au premier domaine de $f(x, y)$, y_0 — au second domaine de $f(x, y)$, sans que $f(x_0, y_0)$ existe. Relativement aux fonctions $f(x)$ d'une seule variable, nous sommes conduits à envisager un seul ***domaine***.

L'ensemble des valeurs prises par une fonction — est appelé ***contre-domaine.***

Le symbole $A \sim B$ veut dire: les ensembles A et B sont de la même puissance. La puissance d'un ensemble A est désignée par $\overline{\overline{A}}$.

De deux nombres ordinaux α et β, celui qui n'est pas inférieur à l'autre sera nommé *max* (α, β).

α étant un nombre ordinal, $\{p_\xi\}$ $(\xi < \alpha)$ désigne la suite: $p_0, p_1, \ldots, p_\xi \ldots$ $\ldots (\xi < \alpha)$.

Nous établissons un *ordre partiel* [4]) pour les paires $[\alpha, \beta]$ de nombres ordinaux de la manière suivante:

$[\alpha_1, \beta_1] \lessapprox [\alpha_2, \beta_2]$, lorsqu'on a simultanément: (i) $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ou bien $\beta_1 \neq \beta_2$; (ii) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$; (iii) $\beta_1 \leqslant \beta_2$.

Nous parlons des ***groupes*** (abstraits) au sens classique: l'opération principale dans le groupe, appelée ***composition*** des éléments x et y est désignée ici par le symbole $x \bigcirc y$. Comme on sait, un groupe commutatif (remplissant la condition: $x \bigcirc y = y \bigcirc x$) est dit *abelien*. Par J nous entendons le ***module*** (élement remplissant l'équation: $x \bigcirc x = x$), par $\bar{x}$ — ***l'élément réciproque*** à l'élément x (c.-à-d. remplissant la condition: $x \bigcirc \bar{x} = \bar{x} \bigcirc x = J$). Au lieu de conserver le terme: ***ordre*** du groupe, nous allons employer le terme de la Théorie des Ensembles: ***puissance*** (de l'ensemble d'éléments) du groupe.

Si h est un élément du grupe, X — un ensemble composé de certains éléments de ce groupe, on appelle X_h — l'ensemble de tous les éléments $x' = x \bigcirc h$, où $x \in X$ (***translation*** de X de „longueur" h [5])).

Soit $\boldsymbol{K}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble A. Alors on dira qu'elle est une *classe* (famille) ***regulière*** dans A, si les conditions suivantes sont réalisées:

(i) chaque sous-ensemble de A ne contenant qu'un seul élément — appartient à $\boldsymbol{K}$;

(ii) $$\text{si} \quad X \subset Y \in \boldsymbol{K}, \quad \text{alors} \quad X \in \boldsymbol{K}.$$

$\mathfrak{s}$ étant un nombre ordinal, nous entendons par $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$ la famille de tous les ensembles qui sont sommes de $\mathfrak{p}$ ensembles de la famille $\boldsymbol{K}$, où $\mathfrak{p}$ est arbitraire $< \mathfrak{s}$; si $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, on voit bien qu'une somme de deux ensembles de $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$ appartient à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$.

[4]) Pour la définition de l'ordre partiel — v. F. Hausdorff: l. c., p. 139.

[5]) Les transformations $x'' = h \bigcirc x$ — constituent la seconde famille possible de translations; si le groupe est abélien, ces deux familles se confondent.

En particulier, soit A un ensemble de paires ordonnées $[x, y]$; nous dirons alors $\boldsymbol{K}$ est une *classe* (famille) *complètement regulière* dans A, si les conditions suivantes ont lieu:

(i) $\boldsymbol{K}$ est une classe régulière dans A;

(ii) si la première projection d'un ensemble Z coïncide avec la première projection d'un ensemble appartenant à $\boldsymbol{K}$, et si — a étant quelconque — l'ensemble d'éléments de Z de type $[a, y]$ appartient toujours à $\boldsymbol{K}$, alors Z appartient à $\boldsymbol{K}$;

(iii) condition symétrique à (ii): il n'y a qu'à remplacer „première" par „seconde", „$[a, y]$" par „$[x, a]$".

Exemple: $\boldsymbol{K}$ — la classe de sous-ensembles finis de l'ensemble A.

§ 3. Théorème auxiliaire sur les paires de nombres ordinaux.

Théorème 1. *Soit Z un ensemble de paires $[\mu, \nu]$, où μ et ν sont des nombres ordinaux; si $\overline{\overline{Z}} \geqslant \aleph_{\alpha+1}$, alors il existe une suite transfinie de type $\omega_{\alpha+1}$, composée d'éléments de Z et croissante (relativement à l'ordre partiel que nous avons défini au § 2):*

$$[\mu_0, \nu_0] \precsim [\mu_1, \nu_1] \precsim \dots [\mu_\xi, \nu_\xi] \precsim \dots \quad (\xi < \omega_{\alpha+1})\ ^{6)}.$$

Démonstration:

Cas (I): La première projection de Z est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$.

Comme d'autre part, l'ensemble Z est de puissance $> \aleph_\alpha$, il existe dans Z une paire $[\mu^*, \nu^*]$ telle que l'ensemble Z^{μ^*} de paires $[\mu^*, \nu]$ qui appartiennent à Z — est de puissance $> \aleph_\alpha$, c.-à-d. $\geqslant \aleph_{\alpha+1}$. Tous les éléments de l'ensemble Z^{μ^*} sont alors comparables, et on en peut extraire une suite croissante:

$$[\mu^*, \nu_0] \precsim [\mu^*, \nu_1] \precsim \dots [\mu^*, \nu_\xi] < \dots \quad (\xi < \omega_{\alpha+1}).$$

Cas (II): La seconde projection de Z est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$.

Raisonnement analogue.

[6]) Nous espérons pouvoir revenir autre part à ce théorème, qui ne cesse pas d'être vrai, si l'on remplace $\alpha + 1$ par β arbitraire (ceci exige pourtant un raisonnement complémentaire assez long). Les paires ordonnés peuvent être remplacées aussi par des *n-ades* ordonnées.

Cas (III): La première et la seconde projection de Z sont de puissance $> \aleph_\alpha$.

La première projection contient par conséquent une suite croissante S_1, de type $\omega_{\alpha+1}$, de nombres ordinaux; si nous nous bornons aux éléments $[\mu, \nu]$ de Z pour lesquels $\mu \in S_1$, nous obtenons un ensemble Z_1 dont la puissance est encore $\geqslant \aleph_{\alpha+1}$. On peut procéder comme dans le cas (II), si la seconde projection de Z_1 est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$; admettons donc qu'elle est de puissance $> \aleph_\alpha$, ce qui entraîne qu'elle contient une suite croissante S_2 de type $\omega_{\alpha+1}$; bornons-nous de nouveau aux éléments $[\mu, \nu]$ de Z_1 pour lesquels $\nu \in S_2$: on arrive ainsi à un ensemble Z_2 dont la puissance reste $\geqslant \aleph_{\alpha+1}$. Si la première projection de Z_2 est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$, on a le cas (I); supposons qu'elle est de puissance $> \aleph_\alpha$: d'après la construction, elle est contenue dans la suite S_1 de type $\omega_{\alpha+1}$; étant ordonnée selon la grandeur de ses éléments, elle doit donc former aussi une suite S_1' de type $\omega_{\alpha+1}$; la seconde projection de Z_2 forme la suite S_2 de type $\omega_{\alpha+1}$.

On peut admettre encore l'hypothèse suivante:

(1) il n'existe dans Z_2 aucune paire $[\mu^*, \nu^*]$ telle que l'ensemble $Z_2^{\mu^*}$ de paires $[\mu^*, \nu]$ qui appartiennent à Z_2 soit de puissance $> \aleph_\alpha$, ni que l'ensemble ${}^{\nu^*}Z_2$ de paires $[\mu, \nu^*]$ qui appartiennent à Z_2 soit de puissance $> \aleph_\alpha$.

(En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait appliquer la méthode des cas (I) et (II)).

Définissons maintenant par l'induction transfinie la suite cherchée: elle sera contenue dans Z_2; si les éléments $[\mu_\xi, \nu_\xi]$ sont déjà construits pour $\xi < \xi_0 < \omega_{\alpha+1}$, nous allons construire la paire $[\mu_{\xi_0}, \nu_{\xi_0}]$. Remarquons dans ce but que pour tout $\xi < \xi_0$ — l'ensemble Y^ξ de tous les μ qui appartiennent à la première projection de Z_2 et satisfont à la condition: $\mu \leqslant \mu_\xi$ — est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ (il faut se rappeler que le numéro d'ordre de μ_ξ dans la suite S_1' est $< \omega_{\alpha+1}$); la même remarque a lieu par rapport à l'ensemble ${}^\xi Y$ $(\xi < \xi_0)$ de tous les ν qui appartiennent à la seconde projection de Z_2 et satisfont à la condition: $\nu \leqslant \nu_\xi$; en raison de l'inégalité: $\xi_0 < \omega_{\alpha+1}$ et de (1), nous pouvons affirmer que l'ensemble Y de toutes les paires $[\mu, \nu]$ appartenant a Z_2 pour lesquelles il existe un tel $\xi < \xi_0$ que $\mu \leqslant \mu_\xi$ ou bien $\nu \leqslant \nu_\xi$ — est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$. Il s'en suit que l'ensemble $Z_2 - Y$ contient $\aleph_{\alpha+1}$ éléments et pour ses élements $[\mu, \nu]$ on a: $\mu > \mu_\xi$ et $\nu > \nu_\xi$ — quel que soit $\xi < \xi_0$; l'une de ces paires de $Z_2 - Y$ sera désignée par $[\mu_{\xi_0}, \nu_{\xi_0}]$.

La suite $\{[\mu_\xi, \nu_\xi]\}$ $(\xi < \omega_{\alpha+1})$ que nous avons ainsi définie satisfait à la thèse du théorème.

Corollaire 2. *Soit Z un ensemble de paires $[\mu, \nu]$, où μ et ν sont des nombres ordinaux; si $\overline{\overline{Z}} > \aleph_\alpha$, il existe dans Z une paire $[\mu^{(0)}, \nu^{(0)}]$ telle que l'ensemble de paires $[\mu, \nu]$ de Z remplissant la condition:*

$$max(\mu, \nu) \leqslant max(\mu^{(0)}, \nu^{(0)})$$

— est de puissance $\geqslant \aleph_\alpha$.

Démonstration: D'après le th. 1, on peut extraire de Z une suite croissante de type $\omega_{\alpha+1}$: on choisit dans cette suite une paire quelconque $[\mu_\xi, \nu_\xi]$ dont le numéro d'ordre ξ est $\geqslant \omega_\alpha$ et on l'appelle $[\mu^{(0)}, \nu^{(0)}]$ [7].

§ 4. A^1 et B^1.

Lemme général 3. *Etant donnés: un ensemble H de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, une classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles, une fonction $f(x, y)$, deux ensembles A et B, supposons qu'ils satisfont aux conditions suivantes:*

(3.1) *$\boldsymbol{K}$ est une classe complètement régulière dans l'ensemble des paires $[x, y]$ telles que $f(x, y) \in H$;*

(3.2) *A est le premier domaine de $f(x, y)$;*

(3.3) *B est le second domaine de $f(x, y)$;*

(3.4) *pour tout élément h de H, il existe une ensemble M_h n'appartenant pas à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$ et contenant $\mathfrak{s}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que $f(x, y) = h$;*

(3.5) *pour tout système (a, b, c), l'ensemble des paires $[x, y]$ pour lesquelles on a à la fois:*

$$f(a, y) = f(x, b) \quad et \quad f(x, y) = c$$

— appartient à K;

[7]) Le cor. 2 pourrait être démontré aisément par une voie directe, sans avoir recours au th. 1 (celui-ci ne sera pas utilisé dans la suite).

(3.6) *pour tout système (a_1, a_2), pourvu que l'on ait $a_1 \neq a_2$, l'ensemble des paires $[a_1, y]$ pour lesquelles $f(a_1, y) = f(a_2, y)$ — appartient à $\boldsymbol{K}$;*

(3.7) *pour tout système (b_1, b_2), pourvu que l'on ait $b_1 \neq b_2$, l'ensemble des paires $[x, b_1]$ pour lesquelles $f(x, b_1) = f(x, b_2)$ — appartient à $\boldsymbol{K}$.*

Alors il existe deux ensembles A^1 et B^1 tels que:

(3 a) $A^1 \subset A$;

(3 b) $B^1 \subset B$;

(3 c) $\overline{\overline{A^1}} = \overline{\overline{B^1}} = \mathfrak{s}$;

(3 d) *quel que soit l'élément h de H, il existe une et une seule paire ordonnée $[x, y]$ telle que l'on ait à la fois:*

$$x \in A^1, \quad y \in B^1 \quad et \quad f(x, y) = h.$$

Démonstration:

On déduit de la condition (3.5) que:

(3.8) *pour tout système (b, c), l'ensemble des paires $[x, b]$ pour lesquelles $f(x, b) = c$ — appartient à $\boldsymbol{K}$;*

(3.9) *pour tout système (a, c), l'ensemble des paires $[a, y]$ pour lesquelles $f(a, y) = c$ — appartient à $\boldsymbol{K}$.*

Soit φ le nombre ordinal initial (*Anfangszahl*) de puissance $\mathfrak{s}$; rangeons tous les éléments de H en une suite transfinie de type φ:

(2) $$h_0, h_1, \dots, h_\xi, \dots \quad (\xi < \varphi).$$

En même temps, rangeons en suite tranfinie toutes les paires $[v, w]$ $(v \in A, w \in B)$:

(3) $$[v_0, w_0], [v_1, w_1], \dots, [v_\xi, w_\xi], \dots \quad (\xi < \lambda)$$

où $\lambda \geqslant \varphi$ (d'après 3.2, 3.3, 3.4).

Ceci posé, passons à définir par l'induction transfinie les trois suites de type φ: $\{a_\xi\}$, $\{b_\xi\}$ et $\{t_\xi\}$; les éléments de chacune de ces suites (prise séparément) seront différents deux à deux et l'on aura toujours:

$$f\{a_\xi, b_\xi\} = t_\xi.$$

1[0]. a_0 et b_0 soient quelconques, pourvu qu'ils remplissent l'égalité $f(a_0, b_0) = h_0$, ce qui est possible d'après 3.4. Nous posons en outre: $t_0 = h_0$.

2⁰. Supposons $\{a_\xi\}$, $\{b_\xi\}$ et $\{t_\xi\}$ définis pour tout $\xi < \xi_0 < \varphi$: il y a lieu à définir a_{ξ_0}, b_{ξ_0} et t_{ξ_0}.

Quant à t_{ξ_0}, ce sera le premier élément h_μ de la suite (2) pour lequel:

$$\text{si} \quad \xi_1 < \xi_0 \quad \text{et} \quad \xi_2 < \xi_0, \quad \text{on a} \quad f(a_{\xi_1}, b_{\xi_2}) \neq h_\mu$$ [8].

Un tel elément h_μ existe et nous démontrons aisément que

$$\text{(4)} \qquad \text{si} \quad t_{\xi_0} = h_{\mu_0}, \quad \text{on a} \quad \mu_0 \geqslant \xi_0.$$

Quant à a_{ξ_0} et b_{ξ_0}, nous cherchons d'abord une paire $[v, w]$ remplissant les dix conditions suivantes:

(W_1) $\quad f(v, w) = t_{\xi_0}$.

(W_2) $\quad v \neq a_\xi, \quad \text{si} \quad \xi < \xi_0$ [9].

(W_3) $\quad f(v, b_\pi) \neq t_{\xi_0}, \quad \text{si} \quad \pi < \xi_0$.

(W_4) $\quad f(v, b_\pi) \neq f(v, b_\varrho), \quad \text{si} \quad \pi < \varrho < \xi_0$.

(W_5) $\quad f(v, b_\pi) \neq f(a_\varrho, b_\sigma), \quad \text{si} \quad \pi < \xi_0, \ \varrho < \xi_0 \quad \text{et} \quad \sigma < \xi_0$.

(W_6) $\quad w \neq b_\xi, \quad \text{si} \quad \xi < \xi_0$ [10].

(W_7) $\quad f(a_\pi, w) \neq t_{\xi_0}, \quad \text{si} \quad \pi < \xi_0$.

(W_8) $\quad f(a_\pi, w) \neq f(a_\varrho, w), \quad \text{si} \quad \pi < \varrho < \xi_0$.

(W_9) $\quad f(a_\pi, w) \neq f(a_\varrho, b_\sigma), \quad \text{si} \quad \pi < \xi_0, \ \varrho < \xi_0 \quad \text{et} \quad \sigma < \xi_0$.

(W_{10}) $\quad f(v, b_\pi) \neq f(a_\varrho, w), \quad \text{si} \quad \pi < \xi_0, \ \varrho < \xi_0$.

Nous allons démontrer préalablement que l'ensemble des paires remplissant toutes ces conditions n'appartient pas à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$, donc qu'il n'est pas vide (l'ensemble vide appartient à $\boldsymbol{K}$ et à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$).

Considérons, en premier lieu, l'ensemble U_1 de tous les v pour lesquels une au moins des conditions (W_2), (W_3), (W_4), (W_5) ne soit pas remplie; U_1 est la projection d'un ensemble appartenant à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$.

[8]) Il importe de remarquer expressément que l'inégalité: $f(x, y) \neq z$ — est supposée remplie même lorsque $f(x, y)$ n'existe pas; pareillement l'inégalité: $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$ sera remplie même lorsque $f(x_1, y_1)$ et $f(x_2, y_2)$ n'existent pas.

[9]) (W_2) est d'ailleurs une conséquence de (W_5).

[10]) (W_6) est d'ailleurs une conséquence de (W_9).

Pour (W_2), il n'y a qu'à appliquer (3. 1) et la condition (i) de la définition des classes régulières; pour (W_3) et (W_5) — on va s'appuyer sur (3. 8); pour (W_4) — sur (3. 7).

D'une façon analogue, on démontre que l'ensemble U_2 de tous les w pour lesquels une au moins des conditions (W_6), (W_7), (W_8), (W_9) n'est pas remplie — est la projection d'un ensemble appartenant à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$.

On fait usage des conditions (3. 1), (3. 9) et (3. 6).

D'après (3. 4), l'ensemble $T = M_{t_{\xi_0}}$ ($M_{t_{\xi_0}}$ est un ensemble de paires $[v, w]$ pour lesquelles $f(v, w) = t_{\xi_0}$) n'appartient pas à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$; parmi les paires de T, celles dont le premier élément v appartient à U_1 constituent un ensemble appartenant à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$ (d'après (3. 9) et la condition (ii) de la définition des classes complètement régulières); également, les paires de T dont le second élément w appartient à U_2 constituent un ensemble appartenant à la famille $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$ (d'après (3. 8) et la condition (iii) dans la définition citée). Par conséquent, l'ensemble des paires $[v, w]$ satisfaisant à toutes les conditions (W_2)—(W_9) et à l'égalité: $f(v, w) = t_{\xi_0}$ (c.-à-d. à la condition (W_1)) — n'appartient pas à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$; ensuite, parmi ces paires, celles qui ne remplissent pas la condition (W_{10}) constituent (en raison de (3.5)) un ensemble appartenant à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$. En résumé, il existe un ensemble n'appartenant pas à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$ formé de paires pour lesquelles toutes les conditions (W_1) — (W_{10}) sont réalisées.

Ainsi, notre but est atteint, puisqu'il nous suffit de savoir que de telles paires existent: soit alors $[v_\varepsilon, w_\varepsilon]$ la première paire de cette espèce dans la suite (3) et posons: $a_{\xi_0} = v_\varepsilon$, $b_{\xi_0} = w_\varepsilon$.

Les trois suites $\{a_\xi\}$, $\{b_\xi\}$ et $\{t_\xi\}$ étant définies, passons aux ensembles A^1 et B^1: A^1 — ce sera l'ensemble de tous les a_ξ, B^1 — l'ensemble de tous les b_ξ. La démonstration des propriétés (3 a), (3 b) et (3 c) ne présente aucune difficulté; s'il s'agit de la condition (3 d), elle se décompose en deux propositions: l'une d'elles („il existe une...“) s'obtient aisément en vertu de la définition de t_ξ, de la formule (4) et de la propriété (W_1); l'autre („il existe une seule...“) est plus difficile à démontrer. Il faut prouver notamment que

$$\text{si} \quad f(a_\nu, b_\pi) = f(a_\varrho, b_\sigma), \quad \text{alors} \quad \nu = \varrho \quad \text{et} \quad \pi = \sigma.$$

Par raison de symétrie, on peut admettre dans la démonstration que:

$$(5)\qquad f(a_\nu, b_\pi) = (f a_\varrho, b_\sigma) \quad \text{et}$$

$$(6)\qquad \pi \leqslant \nu;\quad \varrho \leqslant \nu;\quad \sigma \leqslant \nu.$$

D'après (W_5), trois cas seulement peuvent se présenter:

$$\text{(I)}\ \pi = \nu;\quad \text{(II)}\ \varrho = \nu;\quad \text{(III)}\ \sigma = \nu.$$

Cas (I). Soit $\pi = \nu$.

Alors $t_\pi = f(a_\pi, b_\pi) = f(a_\varrho, b_\sigma)$ ((5)) et: $\varrho \leqslant \pi$, $\sigma \leqslant \pi$ ((16)). Si $\varrho < \pi$ et $\sigma < \pi$, on obtient une conclusion incompatible avec la définition de t_π; on a donc: (I a) $\varrho = \pi$ ou bien (I b) $\sigma = \pi$.

(I a): $\pi = \nu$ et $\varrho = \pi$, d'où $t_\pi = f(a_\pi, b_\sigma)$ ((5)); en vertu du (W_3), il faut que l'on ait $\sigma = \pi$. On a, en somme: $\pi = \nu$, $\varrho = \pi$, $\sigma = \pi$, donc $\nu = \varrho$ et $\pi = \sigma$, c. q. f. d.

(I b) $\pi = \nu$ et $\sigma = \pi$, d'où $t_\pi = f(a_\varrho, b_\pi)$ ((5)); en vertu de (W_7), il faut que l'on ait $\varrho = \pi$. On a, en somme: $\pi = \nu$, $\sigma = \pi$, $\varrho = \pi$, donc $\nu = \varrho$ et $\pi = \sigma$, c. q. f. d.

Cas II. Soit $\varrho = \nu$; d'après ce qui précède, on peut supposer $\pi \neq \nu$.

Alors

$$(7)\qquad \pi < \nu;\quad \pi < \varrho;\quad \sigma \leqslant \varrho, \qquad ((6))$$

$$f(a_\varrho, b_\pi) = f(a_\varrho, b_\sigma). \qquad ((5))$$

D'après (W_4), on a donc nécessairement (II a) $\sigma = \varrho$ ou bien (II b) $\sigma = \pi$.

(II a): $\varrho = \nu$, $\sigma = \varrho$, d'où $f(a_\varrho, b_\pi) = f(a_\varrho, b_\varrho) = t_\varrho$ ((5)); de plus, $\pi < \varrho$ ((7)), ce qui est impossible à cause de (W_3).

(II b): $\varrho = \nu$, $\sigma = \pi$. Donc $\nu = \varrho$ et $\pi = \sigma$, c. q. f. d.

Cas (III). Soit $\sigma = \nu$; d'après ce qui précède, on peut supposer $\pi \neq \nu$ et $\varrho \neq \nu$. On a alors, d'après (6): $\pi < \nu$, $\varrho < \nu$, et d'après (5): $f(a_\nu, b_\pi) = f(a_\varrho, b_\nu)$, en contradiction avec (W_{10}).

La démonstration du lemme 3 est achevée.

Remarque. Observons qu'étant donnés deux ensembles A^* et B^* de puissance $< \mathfrak{s}$, on peut construire en même temps A^1 disjoint

de A^* et B^1 disjoint de B^*; si les ensembles A^+ et B^+, de puissance $< \mathfrak{s}$, satisfont en outre à la condition:

si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \in H$, et si $x_1, x_2 \in A^+$, tandis que $y_1, y_2 \in B^+$, alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$,

— on peut construire A^1 et B^1 de façon que l'on ait: $A^+ \subset A^1$ et $B^+ \subset B^1$. (Pour y parvenir, on doit modifier convenablement la démonstration précédente).

Théorème 4. *Soit G un groupe abélien de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$. Alors il existe deux ensembles A^1 et B^1 tels que:*

(4 a) $A^1 \subset G$;

(4 b) $B^1 \subset G$;

(4 c) $\overline{\overline{A^1}} = \overline{\overline{B^1}} = \mathfrak{s}$;

(4 d) *pour tout élément g du groupe G, il existe une et une seule paire ordonnée $[x, y]$ telle que*

$$x \in A^1,\quad y \in B^1,\quad x \bigcirc g = y.$$

Démonstration:

Cas (I): Il existe un nombre cardinal $\mathfrak{r} < \mathfrak{s}$, tel que l'ensemble des solutions de l'équation $x \bigcirc x = g$ — est de puissance $\leqslant \mathfrak{r}$, pour tout $g \in G$.

Convenons de dire qu'un ensemble Z de paires (x, y) (où $x, y \in G$) appartient à la classe $\boldsymbol{K}$, lorsque

(j) $\mathfrak{s} = \aleph_0$ et l'ensemble Z est fini;

ou bien (jj) $\mathfrak{s} < \aleph_0$ et les deux projections de Z sont de puissance $\leqslant \mathfrak{r} \cdot \aleph_0$.

On démontre sans peine que la classe $\boldsymbol{K}$ est complètement régulière dans l'ensemble de toutes les paires $[x, y]$ (où $x, y \in G$). On applique ensuite le lemme 3 à la fonction $f(x, y) = \bar{x} \bigcirc y$; on pose $H = A = B = G$. Une vérification détaillée n'est nécessaire que pour les conditions (3. 4) et (3. 5).

(3. 4): L'ensemble $\dot{Z}$ de paires $[x, y]$ telles que $\bar{x} \bigcirc y = G$ — n'est autre chose que l'ensemble de toutes les paires $[x, x \bigcirc g]$, x par-

courant le groupe G; donc chacune de ses deux projections est[11]) de puissance $\mathfrak{s}$; il s'en suit que, si $\mathfrak{p} < \mathfrak{s}$, $\dot{Z}$ n'est pas somme de $\mathfrak{p}$ ensembles finis; par conséquent, en cas de l'hypothèse (j), $\dot{Z}$ n'appartient pas à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$; en cas de l'hypothèse (jj), $\dot{Z}$ ne peut non plus appartenir à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$, parce que si un ensemble est somme de $\mathfrak{p}$ ensembles de classe $\boldsymbol{K}$, où $\mathfrak{p} < \mathfrak{s}$, ses deux projections sont de puissance $\leqslant \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{r}\cdot\aleph_0$, donc[12]) de puissance $< \mathfrak{s}$.

(3. 5): Lorsqu'on a:

$$\bar{a} \bigcirc y = \bar{x} \bigcirc b \tag{8}$$

$$\bar{x} \bigcirc y = c, \tag{9}$$

alors:

$$y = x \bigcirc c \qquad ((9)) \tag{10}$$

$$\bar{a} \bigcirc x \bigcirc c = \bar{x} \bigcirc b \qquad ((8),\ (10)) \tag{11}$$

$$\bar{a} \bigcirc x \bigcirc c \bigcirc \bar{b} \bigcirc x = J \qquad ((11)) \tag{12}$$

$$\bar{a} \bigcirc (b \bigcirc \bar{c} \bigcirc c \bigcirc \bar{b}) \bigcirc x \bigcirc c \bigcirc \bar{b} \bigcirc x = J \qquad ((12)) \tag{13}$$

$$\bar{a} \bigcirc b \bigcirc \bar{c} \bigcirc (c \bigcirc \bar{b} \bigcirc x) \bigcirc (c \bigcirc \bar{b} \bigcirc x) = J \qquad ((13)) \tag{14}$$

$$(c \bigcirc \bar{b} \bigcirc x) \bigcirc (c \bigcirc \bar{b} \bigcirc x) = c \bigcirc \bar{b} \bigcirc a. \qquad ((14)) \tag{15}$$

D'après notre supposition, il n'existe que $\mathfrak{r}$ solutions au plus de l'équation: $z \bigcirc z = c \bigcirc b \bigcirc a$, donc $\mathfrak{r}$ solutions au plus (en x) de l'équation (15), et — de même — (en raison de (10)) au plus $\mathfrak{r}$ valeurs possibles de y. Puisque

$$\text{si} \quad \mathfrak{s} = \aleph_0, \quad \mathfrak{r} < \aleph_0 \tag{(j)}$$

et

$$\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{r}\cdot\aleph_0, \tag{(jj)}$$

la condition (3. 5) est démontrée.

Nous avons vérifié ainsi les prémisses du lem. 3; par conséquent, la thèse du lem. 3, qui coïncide dans le cas examiné avec la thèse du th. 4, est prouvée[13]).

[11]) ... identique à G, donc ...

[12]) $\mathfrak{p} < \mathfrak{s}$, $\mathfrak{r} < \mathfrak{s}$, $\aleph_0 < \mathfrak{s}$!

[13]) Dans le raisonnement du cas (I), la supposition que le groupe est abélien n'intervient point.

Cas (II): Pour tout nombre cardinal $\mathfrak{r} < \mathfrak{s}$, il existe un tel g de G que l'ensemble des solutions de l'équation

$$x \bigcirc x = g \tag{16}$$

est de puissance $> \mathfrak{r}$.

Ici, nous faisons usage du fait que le groupe G est abélien[14]). Soit g un élément pour lequel l'équation (16) admet plus que $\mathfrak{r}$ solutions, en particulier la solution $x = a$; alors pour que l'on ait $x \bigcirc x = g$, il faut et il suffit que l'on ait: $(x \bigcirc \bar{a}) \bigcirc (x \bigcirc \bar{a}) = J$; aux éléments x distincts correspondent des éléments $x \bigcirc \bar{a}$ distincts: on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation

$$x \bigcirc x = J \tag{17}$$

— est aussi de puissance $> \mathfrak{r}$, donc, d'après l'hypothèse du cas (II), cet ensemble est nécessairement de puissance $\mathfrak{s}$[15]). Ceci établi, nous procédons comme dans la démonstration du lemme 3[16]), c. à d. nous définissons les trois suites $\{a_\xi\}$, $\{b_\xi\}$ et $\{t_\xi\}$; nous exigeons pourtant 1° que l'on ait: $a_0 \bigcirc a_0 = J$, 2° que la paire $[v, w]$ remplisse les conditions (W_1) — (W_9) et, en outre, la condition

$$v \bigcirc v = J. \tag{18}$$

Puisque le nombre de valeurs de v qui ne satisfont pas aux conditions (W_1) — (W_9) est inférieur à $\mathfrak{s}$, et puisque l'équation (17) possède $\mathfrak{s}$ solutions, nous pouvons trouver une paire $[v, w]$ voulue; on aura

$$w = v \bigcirc t_{\xi_0}; \tag{19}$$

or, heureusement, la condition (W_{10}) se montre remplie; car, si l'on avait:

$$\bar{v} \bigcirc b_\pi = \bar{a}_\varrho \bigcirc w,$$

on aurait aussi, en vertu de (19):

$$v \bigcirc \bar{a}_\varrho \bigcirc v \bigcirc t_{\xi_0} \bigcirc \bar{b}_\pi = J; \tag{20}$$

[14]) Nous ne savons pas, si le th. 4 est valable pour tous les groupes non-commutatifs.

[15]) Le même raisonnement prouve qu'avec nos hypothèses, l'ensemble des solutions de (16) est toujours de puissance $\mathfrak{s}$, s'il n'est pas vide.

[16]) $f(x, y) = \bar{x} \bigcirc y$.

le groupe étant abélien, on aurait encore, selon (18) et (20):

$$\bar{a}_\varrho \bigcirc t_{\xi_0} \bigcirc \bar{b}_\pi = J,$$

$$t_{\xi_0} = a_\varrho \bigcirc b_\pi; \tag{21}$$

mais on avait choisi a_ϱ de façon que (d'après (18))

$$a_\varrho \bigcirc a_\varrho = J,$$

ce qui impliquerait avec (21) que

$$t_{\xi_0} = \bar{a}_\varrho \bigcirc b_\pi = f(a_\varrho, b_\pi),$$

en contradiction avec la définition de t_{ξ_0}.

A partir de ce point, la démonstration est entièrement analogue à celle du lem. 3.

Corollaire 5. *Soit G un groupe abélien de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$. Alors il existe deux ensembles $\widehat{A^1}$ et $\widehat{B^1}$ tels que:*

(5 a) $\widehat{A^1} \subset G$;
(5 b) $\widehat{B^1} \subset G$;
(5 c) $\widehat{A^1}$ *et* $\widehat{B^1}$ *sont de puissance* $\mathfrak{s}$;
(5 d) *pour tout élément g du groupe G, il existe une et une seule paire ordonnée $[x, y]$ telle que*

$$x \in \widehat{A^1}, \quad y \in \widehat{B^1}, \quad x \bigcirc y = g.$$

On peut prouver ce corollaire ou bien par une démonstration directe, analogue à la précédente (avec $f(x, y) = x \bigcirc y$), ou bien en s'appuyant sur la thèse du th. 4 (on remplace les éléments x de l'ensemble A^1 par les $\bar{x}$).

Corollaire 6. *Soit G un groupe abélien de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$. Alors il existe deux ensembles A^1 et B^1 tels que:*

(6 a) $A^1 \subset G$;
(6 b) $B^1 \subset G$;
(6 c) $\overline{\overline{A^1}} = \overline{\overline{B^1}} = \mathfrak{s}$;
(6 d) *pour toute paire ordonnée $[g_1, g_2]$ formée d'éléments de G, il existe une et une seule paire ordonnée $[x, y]$ telle que*

$$x \in A^1, \quad y \in B^1, \quad x \bigcirc g_1 = y \bigcirc g_2.$$

Ceci est une conséquence immédiate du cor. 4.

Lorsque G est le groupe des nombres entiers où l'opération $\bigcirc$ signifie l'addition, les ensembles A^1 et B^1 peuvent être définis directement de la manière suivante: tout nombre entier N non nul se laisse répresenter — et d'une seule façon — sous la forme:

$$N = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \cdot 3^{n_i},$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ et $0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k$; l'ensemble A^1 soit constitué par le nombre 0 et par les nombres N pour lesquels tous les n_i sont pairs, l'ensemble B^1 — par le nombre 0 et par les nombres N pour lesquels tous les n_i sont impairs.

§ 5. $A^{\mathfrak{m}}$ et $B^{\mathfrak{m}}$.

Lemme général 7. *Etant donnés: un ensemble H de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, une classe $\mathbf{K}$ d'ensembles, une fonction $f(x, y)$, deux ensembles A et B, supposons satisfaites les conditions* (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.6), (3.7), (3.8) *et* (3.9); *soit $2 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{s}$. Alors il existe deux ensembles $A^{\mathfrak{m}}$ et $B^{\mathfrak{m}}$ tels que:*

(7 a) $A^{\mathfrak{m}} \subset A$;
(7 b) $B^{\mathfrak{m}} \subset B$;
(7 c) $\overline{\overline{A^{\mathfrak{m}}}} = \overline{\overline{B^{\mathfrak{m}}}} = \mathfrak{s}$;
(7 d) *pour tout élément h de H, il existe exactement $\mathfrak{m}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que:*

$$x \in A^{\mathfrak{m}}, \quad y \in B^{\mathfrak{m}}, \quad f(x, y) = h.$$

Démonstration:

Cas (I): $\mathfrak{m} = \mathfrak{s}$.

On définit $A^{\mathfrak{s}}$ et $B^{\mathfrak{s}}$ comme il suit: d'après (3.4), il existe, pour tout h de H, un ensemble M_h composé de $\mathfrak{s}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que $f(x, y) = h$; nous posons $V = \sum_{h \in H} M_h$; l'ensemble V est de puissance $\mathfrak{s}$; la première projection de V sera précisément $A^{\mathfrak{s}}$, et la seconde projection — sera $B^{\mathfrak{s}}$. Il suffit de démontrer la propriété (7 c), c.-à-d. que $A^{\mathfrak{s}}$ et $B^{\mathfrak{s}}$ sont de puissance $\mathfrak{s}$ (toutes les autres propriétés sont évidentes). Or, puisque $\overline{\overline{V}} = \mathfrak{s}$, on a $\overline{\overline{A^{\mathfrak{s}}}} \leqslant \mathfrak{s}$ et $\overline{\overline{B^{\mathfrak{s}}}} \leqslant \mathfrak{s}$; il reste à prouver les inégalités inverses: $\overline{\overline{A^{\mathfrak{s}}}} \geqslant \mathfrak{s}$ et $\overline{\overline{B^{\mathfrak{s}}}} \geqslant \mathfrak{s}$, qui se déduisent immédiatement du fait que même les projections de chacun des ensembles M_h pris séparément sont de puissance $\mathfrak{s}$, d'après (3.4), (3.8) et (3.9) (dans le cas contraire, M_h devrait appartenir à $\mathbf{K}(\mathfrak{s})$).

Cas (II): $\mathfrak{m}$ est un nombre fini ($<\aleph_0$).

La démonstration peut être calquée sur celle du lem. 3, exception faite des différences suivantes:

Définition de $\{t_{\xi_0}\}$: t_{ξ_0} est le premier élément h_μ de la suite (2) pour lequel:

l'ensemble des paires $[\xi_1, \xi_2]$ remplissant les conditions: $\xi_1 < \xi_0$, $\xi_2 < \xi_0$ et $f(a_{\xi_1}, b_{\xi_2}) = h_\mu$ — est de puissance $<\mathfrak{m}$.

Soit m le nombre ordinal correspondant à la puissance $\mathfrak{m}$. Au lieu de (4), on démontre aisément que

$$\text{(22)} \qquad \text{si} \quad t_{\xi_0} = h_{\mu_0}, \quad \text{alors} \quad m(\mu_0+1) > \xi_0.$$

On supprime ensuite (W_{10}) parmi les conditions (W_i). S'il s'agit de prouver qu'il existe, pour tout h, $\mathfrak{m}$ paires ordonnées $[x, y]$ au moins telles que $x \in A^{\mathfrak{m}}$, $y \in B^{\mathfrak{m}}$, $f(x, y) = h$, — on s'appuie sur la définition de $\{t_\xi\}$, sur la formule (22) et sur la propriété (W_1).

Il reste à montrer que l'ensemble de ces paires est de puissance $\mathfrak{m}$ au plus: supposons qu'au contraire, il contienne $\mathfrak{m}+1$ paires distinctes; on aura p. ex.

$$f(a_{\varepsilon_1}, b_{\eta_1}) = f(a_{\varepsilon_2}, b_{\eta_2}) = \ldots = f(a_{\varepsilon_{m+1}}, b_{\varepsilon_{m+1}}),$$

on peut admettre de plus que $\pi = max(\varepsilon_1, \eta_1) \geqslant max(\varepsilon_i, \eta_i)$, — pour $i = 1, 2, \ldots m+1$, et — en raison de symétrie — que $\varepsilon_1 \geqslant \eta_1$, donc que $\pi = \varepsilon_1$.

Considérons les équations

$$\text{(23)} \qquad f(a_{\varepsilon_1}, b_{\eta_1}) = f(a_{\varepsilon_j}, b_{\eta_j}) \quad (j = 2, 3, \ldots m+1).$$

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 3, on conclut, en vertu des conditions (W_1)—(W_9), qu'il ne peut y avoir que les deux cas suivants:

(i) $\varepsilon_1 = \eta_1 = \pi$; $\varepsilon_j < \pi$, $\eta_j < \pi$ — pour tout $j = 2, 3, \ldots, m+1$;

ou bien

(ii) $\varepsilon_1 = \eta_j = \pi$, $\eta_1 < \pi$, $\varepsilon_j < \pi$ — pour tout $j = 2, 3, \ldots, m+1$.

On a évidemment (i), lorsque $\varepsilon_1 = \eta_1$, et (ii), lorsque $\varepsilon_1 > \eta_1$.

Si l'on a (i), alors $f(a_\pi, b_\pi) = f(a_{\varepsilon_j}, b_{\eta_j})$ $(j = 2, 3, \ldots, m+1)$, donc $t_\pi = f(a_{\varepsilon_j}, b_{\eta_j})$ — pour $\mathfrak{m}$ systèmes différents $[a_{\varepsilon_j}, b_{\eta_j}]$, où $\varepsilon_j < \pi$ et $\eta_j < \pi$, ce qui conduit à une contradiction avec la définition de t_π.

Si l'on a (ii), alors $f(a_\pi, b_{\eta_1}) = f(a_{\varepsilon_j}, b_\pi)$ $(j = 2, 3, \ldots, m+1)$. Puisque $m \geqslant 2$, on en déduit que

$$\text{(24)} \qquad f(a_{\varepsilon_2}, b_\pi) = f(a_{\varepsilon_3}, b_\pi);$$

mais, d'après (ii), $\eta_2 = \eta_3 = \pi$, et, d'autre part, les paires $[\varepsilon_2, \eta_2]$ et $[\varepsilon_3, \eta_3]$ doivent être différentes, ce qui entraîne l'inégalité: $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$.

Alors l'égalité (24) se montre incompatible avec (W_8).

Cas (III): $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} < \mathfrak{s}$.

Soit $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, $\mathfrak{s} = \aleph_\beta$, $\beta > \alpha$, $\omega_\beta = \varphi$.

La démonstration est analogue à celle du cas précédent. Il n'y a qu'à remarquer les modifications suivantes:

t_{ξ_0} signifie le premier élément h_μ de la suite (2) pour lequel:

l'ensemble des paires $[\xi_1, \xi_2]$ remplissant les conditions: $\xi_1 < \xi_0$, $\xi_2 < \xi_0$ et $f(a_{\xi_1}, b_{\xi_2}) = h_\mu$ — est de puissance $<\mathfrak{m}$.

On démontre aisément que

$$\text{(25)} \qquad \text{si} \quad t_{\xi_0} = h_{\mu_0}, \quad \text{alors} \quad \omega_\alpha(\mu_0+1) > \xi_0;$$

par suite, quand ξ_0 tend en croissant vers $\varphi > \omega_\alpha$, le μ_0 correspondant tend aussi vers φ.

Afin de prouver qu'il existe, pour tout h, au moins $\mathfrak{m}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que $x \in A^{\mathfrak{m}}$, $y \in B^{\mathfrak{m}}$, $f(x, y) = h$, on s'appuie sur la définition de $\{t_\xi\}$, sur la formule (25) et sur la propriété (W_1).

Il reste à montrer que l'ensemble de ces paires est de puissance $\mathfrak{m}$ au plus; on suppose qu'au contraire, il y en ait plus que $\mathfrak{m}$; donc, d'après le cor. 2, dans l'ensemble Z des paires $[\mu, \nu]$ telles que $f(a_\mu, b_\nu) = h$, on pourra trouver une paire $[\mu^{(0)}, \nu^{(0)}]$ pour laquelle l'ensemble $Z^{(0)}$ des paires $[\mu, \nu]$ de Z qui remplissent la condition

$$max(\mu, \nu) \leqslant max(\mu^{(0)}, \nu^{(0)}) = \pi$$

— est de puissance $\geqslant \mathfrak{m}$. Pour l'ensemble $Z^{(0)}$, on peut déjà procéder comme dans le cas (II), en obtenant $\mathfrak{m}$ égalités (23), ce qui mène à une contradiction avec la définition de t_π ou avec (W_8) [17].

Ainsi, le lemme 7 est démontré.

Remarque: Observons qu'étant donnés deux ensembles A^* et B^* de puissance $<\mathfrak{s}$, on peut construire $A^{\mathfrak{m}}$ disjoint avec A^* et

[17]) On vérifie l'impossibilité du cas (II) (ii) encore plus rapidement, si l'on applique le th. 1 au lieu du cor. 2.

$B^{\mathfrak{m}}$ disjoint en même temps avec B^*; si les ensembles A^+ et B^+, de puissance $< \mathfrak{s}$, satisfont en outre à la condition:

quel que soit l'élément h de H, l'ensemble des solutions $[x, y]$ de l'équation: $f(x, y) = h$, telles que $x \in A^+$, $y \in B^+$ — est de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$,

— on peut construire $A^{\mathfrak{m}}$ et $B^{\mathfrak{m}}$ de façon que l'on ait: $A^+ \subset A^{\mathfrak{m}}$ et $B^+ \subset B^{\mathfrak{m}}$.

On voit que le lem. 7 conduit aux énoncés analogues[18]) resp. à ceux du th. 4, cor. 5 et 6; nous ne formulons explicitement que le dernier:

Corollaire 8. *Soit G un groupe de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$; soit $2 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{s}$. Alors il existe deux ensembles $A^{\mathfrak{m}}$ et $B^{\mathfrak{m}}$ tels que:*

(8 a) $A^{\mathfrak{m}} \subset G$;

(8 b) $B^{\mathfrak{m}} \subset G$;

(8 c) $\overline{\overline{A^{\mathfrak{m}}}} = \overline{\overline{B^{\mathfrak{m}}}} = \mathfrak{s}$;

(8 d) *quel que soit la paire ordonnée $[g_1, g_2]$ formée d'éléments de G, il existe exactement $\mathfrak{m}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que*

$$x \in A^{\mathfrak{m}}, \quad y \in B^{\mathfrak{m}}, \quad x \bigcirc g_1 = y \bigcirc g_2 \text{ }^{19}).$$

Pour la démonstration, on emploie le lem. 7, en y posant: $H = A = B = G$; $f(x, y) = \overline{x} \bigcirc y$; $\boldsymbol{K}$ — égal à la classe composée de l'ensemble vide et de tous les ensembles à un seul élément, celui-ci étant une paire $[x, y]$ où $x, y \in G$. Puisque (3.5) ne se trouve pas parmi les prémisses du lem. 7, la supposition que le groupe soit abélien n'intervient pas.

§ 6. $D^{\mathfrak{m}}$.

Nous n'avons étudié jusqu'ici que les problèmes de type (b) décrit au § 1; passons maintenant au type (a).

Lemme général 9. *Etant donnés: un ensemble H de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, une classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles, une fonction $f(x, y)$, un ensemble D, un nombre cardinal $\mathfrak{m}$ tel que $4 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{s}$, supposons qu'ils satisfont aux conditions: (3.1), (3.4), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) et — de plus — aux conditions suivantes:*

[18]) Pourtant sans restriction aux groupes abéliens.

[19]) Pour $\mathfrak{m} = \mathfrak{s}$, le cor. 8 est tout à fait banal: on peut poser: $A^{\mathfrak{s}} = B^{\mathfrak{s}} = G$.

(9.1) *le premier et le second domaine de $f(x, y)$ est contenu dans l'ensemble D;*

(9.2) *si $f(x, a) = f(a, a)$, on a: $x = a$;*

(9.3) *si $f(a, y) = f(a, a)$, on a: $y = a$;*

(9.4) *si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, alors $f(y_1, x_1) = f(y_2, x_2)$;*

(9.5) *pour qu'un ensemble Z de paires $[z, a]$ (a étant fixe) appartienne à $\boldsymbol{K}$, il faut et il suffit que l'ensemble des paires $[a, z]$ „symétrique" à Z appartienne à $\boldsymbol{K}$;*

(9.6) *pour tout h de H, l'ensemble des paires $[x, x]$ telles que $f(x, x) = h$ — appartient à $\boldsymbol{K}$[20]).*

Alors il existe un ensemble $D^{\mathfrak{m}}$ tel que:

(9 a) $D^{\mathfrak{m}} \subset D$;

(9 b) $\overline{\overline{D^{\mathfrak{m}}}} = \mathfrak{s}$;

(9 c) *pour tout élément h de H, il existe exactement $\mathfrak{m}$ ou bien $\mathfrak{m}+1$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que l'on ait à la fois:*

$$x, y \in D^{\mathfrak{m}} \quad \text{et} \quad f(x, y) = h;$$

et lorsque, en particulier, h jouit de la propriété $E(h)$, il en existe exactement $\mathfrak{m}$.

La propriété $E(h)$ s'énonce ainsi:

$E(h)$: Il existe un ensemble N_h n'appartenant pas à $\boldsymbol{K}(\mathfrak{s})$ et contenant $\mathfrak{s}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que $f(x, y) = h$ et $f(y, x) \neq h$.

Démonstration:

L'idée est la même que dans la démonstration des lem. 3 et 7. Signalons, seulement, quelques différences les plus importantes:

On définit par induction transfinie deux suites de type φ: $\{d_\xi\}$ et $\{t_\xi\}$.

1°. d_0 et d_1 soient arbitraires (mais distincts), pourvu qu'ils remplissent l'égalité $f(d_0, d_1) = h_0$; si $h = h_0$ jouit de la propriété $E(h)$, nous demandons de plus que l'on ait: $f(d_1, d_0) \neq h_0$. On pose, en outre, $t_0 = h_0$.

2°. Supposons définies: la suite $\{t_\xi\}$ pour tout $\xi < \xi_0 < \varphi$ et la suite $\{d_\xi\}$ pour tout $\xi < 2\xi_0$ — et passons à la définition de t_{ξ_0}, $d_{2\xi_0}$ et $d_{2\xi_0+1}$. On aura toujours: $f(d_{2\xi}, d_{2\xi+1}) = t_\xi$. —

[20]) Ces conditions ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres.

Pour t_{ξ_0}, nous choisissons le premier élément h_μ de la suite (2) pour lequel:

l'ensemble des paires $[\xi_1, \xi_2]$ telles que $\xi_1 < 2\xi_0$, $\xi_2 < 2\xi_0$ et $f(d_{\xi_1}, d_{\xi_2}) = h_\mu$ — est de puissance $< \mathfrak{m}$.

Quant à $d_{2\xi_0}$ et $d_{2\xi_0+1}$, nous cherchons préalablement une paire $[v, w]$ remplissant les conditions suivantes:

(W_1) $\quad f(v, w) = t_{\xi_0}$.

(W_{11}) $\quad$ Si $E(t_{\xi_0})$[21], on a $f(w, v) \neq t_{\xi_0}$.

(W_{12}) $\quad v \neq d_\xi$, si $\xi < 2\xi_0$[22].

(W_{13}) $\quad f(v, d_\pi) \neq t_{\xi_0}$, si $\pi < 2\xi_0$.

(W_{14}) $\quad f(d_\pi, v) \neq t_{\xi_0}$, si $\pi < 2\xi_0$.

(W_{15}) $\quad f(v, d_\pi) \neq f(v, d_\varrho)$, si $\pi < \varrho < 2\xi_0$.

(W_{16}) $\quad f(d_\pi, v) \neq f(d_\varrho, v)$, si $\pi < \varrho < 2\xi_0$.

(W_{17}) $\quad f(v, d_\pi) \neq f(d_\varrho, d_\sigma)$, si $\pi < 2\xi_0$, $\varrho < 2\xi_0$, $\sigma < 2\xi_0$.

(W_{18}) $\quad f(d_\pi, v) \neq f(d_\varrho, d_\sigma)$, si $\pi < 2\xi_0$, $\varrho < 2\xi_0$, $\sigma < 2\xi_0$[23].

(W_{19}) $\quad f(v, v) \neq f(d_\pi, d_\varrho)$, si $\pi < 2\xi_0$, $\varrho < 2\xi_0$.

(W_{20}) ⋮ (W_{27}) $\quad$ Conditions analogues à (W_{12})—(W_{19}) qu'on en obtient en y remplaçant „v" par „w".

(W_{28}) $\quad v \neq w$.

On démontre, comme dans le lem. 3 (bien qu'avec un peu plus de peine), que de telles paires $[v, w]$ existent, et on pose $d_{2\xi_0} = v$, $d_{2\xi_0+1} = w$. Tous les d_ξ constituent l'ensemble $D^{\mathfrak{m}}$.

Pour prouver la thèse (9 c), supposons que l'on ait

$$f(d_{\varepsilon_1}, d_{\eta_1}) = f(d_{\varepsilon_2}, d_{\eta_2}) = \ldots = f(d_{\varepsilon_\gamma}, d_{\eta_\gamma}),$$

où l'ensemble des nombres ordinaux $1, 2, \ldots \gamma$ — est de puissance $\geqslant \mathfrak{m} + 1$; et que

(26) $\quad max(\varepsilon_\iota, \eta_\iota) \leqslant max(\varepsilon_1, \eta_1)$, si $\iota \leqslant \gamma$; $max(\varepsilon_1, \eta_1)$ égal à $2\xi_0$ où à $2\xi_0 + 1$.

[21]) $E(x)$ veut dire: „$h = x$ jouit de la propriété $E(h)$".

[22]) (W_{12}) est d'ailleurs une conséquence de (W_{17}).

[23]) D'après (9.5), (W_{16}) et (W_{18}) sont des conséquences de (W_{15}) et (W_{17})

Il y aura trois cas possibles:

(i) $\quad \varepsilon_1 = 2\xi_0$, $\eta_1 = 2\xi_0 + 1$;

(ii) $\quad \varepsilon_1 = 2\xi_0 + 1$, $\eta_1 = 2\xi_0$ et il existe en outre une paire: $\varepsilon_\delta = 2\xi_0$, $\eta_\delta = 2\xi_0 + 1$;

(iii) $\quad$ ni l'une ni l'autre des deux conditions précédentes n'a lieu.

Dans les cas (i) et (ii), on parvient à une contradiction, si $E(t_{\xi_0})$; mais si t_{ξ_0} ne jouit pas de la propriété E, on est aussi amené à une contradiction, lorsque l'ensemble des nombres $1, 2, \ldots \gamma$ — est de puissance $\geqslant \mathfrak{m} + 2$ (en particulier, on fait appel dans ce raisonnement aux conditions (9.2) et (9.3)).

Dans le cas (iii), toute paire $[\varepsilon_\iota, \eta_\iota]$ appartient nécessairement à une des huit espèces suivantes:

1*.	$\varepsilon_\iota = 2\xi_0 + 1$,	$\eta_\iota < 2\xi_0$.	5*.	$\varepsilon_\iota = 2\xi_0 + 1$,	$\eta_\iota = 2\xi_0 + 1$.
2*.	$\varepsilon_\iota = 2\xi_0$,	$\eta_\iota < 2\xi_0$.	6*.	$\varepsilon_\iota = 2\xi_0$,	$\eta_\iota = 2\xi_0$.
3*.	$\varepsilon_\iota < 2\xi_0$,	$\eta_\iota = 2\xi_0 + 1$.	7*.	$\varepsilon_\iota = 2\xi_0 + 1$,	$\eta_\iota = 2\xi_0$.
4*.	$\varepsilon_\iota < 2\xi_0$,	$\eta_\iota = 2\xi_0$.	8*.	$\varepsilon_\iota < 2\xi_0$.	$\eta_\iota < 2\xi_0$

En vertu de (W_{25}), (W_{17}), (W_{26}), (W_{18}), (W_{27}) et (W_{19}) — la présence de paires d'espèce 8* et la présence de paires d'une quelconque des espèces 1*—6* s'excluent mutuellement. Il n'y a donc que deux possibilités suivantes:

(j) $\quad$ toutes les paires envisagées sont d'espèces 7* et 8*;

(jj) $\quad$ „ „ „ „ „ „ 1*—7*.

(j): L'existence d'une paire d'espèce 7* est bien sure — d'après (26); d'où l'on a

$$f(d_{2\xi_0+1}, d_{2\xi_0}) = f(d_{\varepsilon_2}, d_{\eta_2}) = \ldots,$$

donc, en vertu de (9.4),

$$f(d_{2\xi_0}, d_{2\xi_0+1}) = f(d_{\eta_2}, d_{\varepsilon_2}) = \ldots,$$

et nous retrouvons le cas (i).

(jj): S'il existe une paire d'espèce 7*, la condition (9.4) nous ramène de nouveau au cas (i); supposons donc qu'il n'existe que des paires d'espèces 1*—6*. En tenant compte de (9.2) et (9.3), on s'assure encore que — de ces six espèces — quatre au plus peuvent se présenter simultanément; mais $\mathfrak{m}+1 \geqslant 5$, d'où il résulte qu'il existe nécessairement deux paires différentes de la même espèce; ceci contredit cependant aux conditions (W_{23}), (W_{15}), (W_{24}) et (W_{16}) [24]).

Remarque: Observons qu'étant donné un ensemble D^* de puissance $<\mathfrak{s}$, l'ensemble $D^{\mathfrak{m}}$ peut être construit de façon à être disjoint avec D^*; de même, si l'ensemble D^+, de puissance $<\mathfrak{s}$, satisfait à la condition suivante:

pour tout h de H, l'ensemble der solutions $[x, y]$ de l'équation $f(x, y) = h$ telles que $x, y \in D^+$, est de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$,

on peut construire l'ensemble $D^{\mathfrak{m}}$ de façon que l'on ait: $D^+ \subset D^{\mathfrak{m}}$.

Corollaire 10. *Soit G un groupe de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Alors il existe un ensemble $D^{\mathfrak{m}}$ tel que:*

(10 a) $D^{\mathfrak{m}} \subset G$;

(10 b) *quelle que soit la paire ordonnée $[g_1, g_2]$ formée de deux éléments différents de G, il existe exactement $\mathfrak{m}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que*

$$x, y \in D^{\mathfrak{m}}, \quad x \bigcirc g_1 = y \bigcirc g_2$$ [19]) [25]).

Pour la démonstration, on pose dans le lem. 9: $H = G - (J)$ (du groupe entier, on enlève son module J); $f(x, y) = \overline{x} \bigcirc y$; $D = G$; $\boldsymbol{K}$ est la classe composée de l'ensemble vide et de tous les ensembles à un seul élément, celui-ci étant une paire $[x, y]$, où $x, y \in G$, $x \neq y$. Rappelons que pour $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ — on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} + 1$.

Corollaire 11. *Soit G un groupe de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, et $\mathfrak{m}$ — entier pair > 2. Alors il existe un ensemble $D^{\mathfrak{m}}$ remplissant les conditions* (10 a) *et* (10 b) [25]).

Le raisonnement diffère peu de celui appliqué au cor. 10, on ajoute cependant que lorsque $J \neq h = \overline{h}$ (c. à. d. lorsque h, étant $\neq J$, ne jouit pas de la propriété E) — il est impossible de représenter h de $\mathfrak{m}+1$ façons dans la forme

$$h = \overline{x} \bigcirc y \qquad (x, y \in D^{\mathfrak{m}});$$

[24]) Pour $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, toute la démonstration peut être simplifiée; dans ce cas, les hypothèses (9.2) et (9.3) sont même superflues.

[25]) La condition analogue à (8 c) est ici omise, comme conséquence immédiate des autres conditions.

ceci résulte du fait que $\mathfrak{m}+1$ est un nombre impair, tandis que si l'on a $J \neq h = \overline{h}$ et $h = \overline{x} \bigcirc y$, on a aussi $h = \overline{y} \bigcirc x$ et $y \neq x$; donc le nombre de ces représentations de h est pair, par conséquent, il ne peut pas être égal à $\mathfrak{m}+1$, donc il est égal à $\mathfrak{m}$.

Corollaire 12. *Soit G un groupe de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, et $\mathfrak{m}$ — un entier impair > 3. Alors il existe un ensemble $D^{\mathfrak{m}}$ remplissant les conditions suivantes:*

(12 a) $D^{\mathfrak{m}} \subset G$;

(12 b) *si $g \in G$ et $g \bigcirc g \neq J$, il existe exactement $\mathfrak{m}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que*

$$x, y \in D^{\mathfrak{m}}, \quad x \bigcirc g = y;$$

(12 c) *si $g \in G$, $g \neq J$ et $g \bigcirc g = J$, il existe exactement $\mathfrak{m}+1$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que*

$$x, y \in D^{\mathfrak{m}}, \quad x \bigcirc g = y$$ [25]).

La démonstration s'appuie sur le lem. 9; elle est analogue à celle du cor. 11; (12 c) résulte du fait qu'actuellement $\mathfrak{m}$ est impair.

Théorème 13. *Soit G un groupe abélien, de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, remplissant en outre la condition*

(†) *si* $x \bigcirc x = J$, *on a:* $x = J$;

si $1 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{s}$, il existe un ensemble $D^{\mathfrak{m}}$ satisfaisant à (10 a) *et* (10 b) [25]).

Démonstration:

En tenant compte des cor. 10, 11, 12 et de la condition (†), il suffit de considérer le cas: $1 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 3$. Aux conditions (W_i) introduites dans la démonstration du lem. 9 ($f(x, y)$ étant posé $= \overline{x} \bigcirc y$) nous ajoutons les suivantes:

(W_{29}) $\quad v \bigcirc v \neq d_\pi \bigcirc d_\varrho$, si $\pi < 2\xi_0$, $\varrho < 2\xi_0$.

(W_{30}) $\quad v \bigcirc v \neq d_\pi \bigcirc d_\varrho \bigcirc \overline{t}_{\xi_0}$, si $\pi < 2\xi_0$, $\varrho < 2\xi_0$.

(W_{31}) $\quad v \bigcirc v \neq d_\pi \bigcirc d_\varrho \bigcirc \overline{t}_{\xi_0} \bigcirc \overline{t}_{\xi_0}$, si $\pi < 2\xi_0$, $\varrho < 2\xi_0$.

Ces conditions supplémentaires pourront être satisfaites, car, dans nos hypothèses, la „division par 2“ est une opération univoque; la suite du raisonnement ne change pas, il faut pourtant examiner de plus près le cas (iii) du lem. 9; à un certain lieu, on doit d'ailleurs considérer séparément les deux cas: $\mathfrak{m}=1$ et $2\leqslant\mathfrak{m}\leqslant 3$.

Corollaire 14. *Soit G un groupe abélien de puissance $\mathfrak{s}$ remplissant en outre la condition (†); si $\aleph_0\leqslant\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{s}$, il existe un ensemble $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$ tel que:*

(14 a) $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}\subset G$;

(14 b) *quel que soit l'élément g du groupe G, il existe exactement $\mathfrak{m}$ paires ordonnées $[x, y]$ telles que*

$$x, y\in\widehat{D^{\mathfrak{m}}},\quad x\bigcirc y=g \text{ [25]}.$$

Démonstration à l'aide du lem. 9: $f(x, y)=x\bigcirc y$; $H=D=G$.

Théorème 15. *Soit G un groupe abélien de puissance $\mathfrak{s}\geqslant\aleph_0$, remplissant en outre la condition (†); si $\mathfrak{m}$ est un entier positif, il existe un ensemble $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$ tel que:*

(15 a) $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}\subset G$;

(15 b) *quel que soit l'élément g du groupe G, il existe exactement $\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{m}+1$ paires ordonnées $[x, y]$* [26]) *telles que*

$$x, y\in\widehat{D^{\mathfrak{m}}},\quad x\bigcirc y=g \text{ [25]}.$$

La démonstration est analogue à celle du th. 13; seulement, on pose $f(x, y)=x\bigcirc y$ et, au lieu des propositions (W_{29})—(W_{31}), on écrit la suivante:

$$(W_{32})\qquad v\bigcirc v\neq t_{\xi_0}\bigcirc d_\pi\bigcirc\overline{d}_\varrho,\quad \text{si}\quad \pi<2\xi_0,\ \varrho<2\xi_0.$$

§ 7. Cas des nombres réels.

Nous allons appliquer les résultats obtenus au groupe des nombres réels (resp. complexes) où l'opération $\bigcirc$ signifie l'addition [27]) [28]).

[26]) Pour qu'il y en ait un nombre impair, il faut et il suffit que g soit de la forme: $g=k\bigcirc k$, où k appartient à $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$.

[27]) Pour le groupe des nombres rationnels ou entiers, il suffit de remplacer dans les énoncés $2^{\aleph_0}$ par $\aleph_0$.

[28]) Une telle restriction permet parfois de simplifier considérablement la démonstration ou même de trouver une démonstration simple basée sur une idée différente.

Corollaire 16. *Si $1\leqslant\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$, il existe deux ensembles linéaires* [29]) *$A^{\mathfrak{m}}$ et $B^{\mathfrak{m}}$ de puissance $2^{\aleph_0}$, tels que, pour tout h_1 et h_2, $A^{\mathfrak{m}}_{h_1}\cdot B^{\mathfrak{m}}_{h_2}$ contient exactement $\mathfrak{m}$ points* [30]).

Corollaire 17. *Si $1\leqslant\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble linéaire $D^{\mathfrak{m}}$ tel que, si $h_1\neq h_2$, $D^{\mathfrak{m}}_{h_1}\cdot D^{\mathfrak{m}}_{h_2}$ contient exactement $\mathfrak{m}$ points.*

Corollaire 18. *Si $\aleph_0\leqslant\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble linéaire $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$ tel que — pour tout nombre réel g — il y a exactement $\mathfrak{m}$ façons différentes de représenter g dans la forme: $g=x+y$, où $x, y\in\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$.*

Corollaire 19. *Si $1\leqslant\mathfrak{m}<\aleph_0$, il existe un ensemble linéaire $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$ tel qu'il y a exactement $\mathfrak{m}$ ou bien $\mathfrak{m}+1$ façons différentes de représenter g dans la forme: $g=x+y$, où $x, y\in\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$; si $\frac{1}{2}g\in\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$, le nombre de ces modes de répresentation est impair; sinon — il est pair.*

Corollaire 20. *Si $1\leqslant\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$, il existe deux ensembles linéaires $\widehat{A^{\mathfrak{m}}}$ et $\widehat{B^{\mathfrak{m}}}$ de puissance $2^{\aleph_0}$, tels que, pour tout nombre réel g, il y a exactement $\mathfrak{m}$ façons différentes de représenter g dans la forme: $g=x+y$, où $x\in\widehat{A^{\mathfrak{m}}}$, $y\in\widehat{B^{\mathfrak{m}}}$.*

Ces corollaires se déduisent des cor. 6, 8, th. 13, cor. 14, th. 15 et cor. 5. La question, s'il existe un ensemble linéaire C tel que $C_{h_1}\cdot C_{h_2}$ contienne toujours un et un seul point (pourvu que l'on ait: $h_1\neq h_2$), avait été posée par M-lle S. Braun, à l'occasion du travail cité de MM. Ruziewicz et Sierpiński, et a été le point de départ de nos recherches; elle se trouve résolue par le cor. 17, si l'on y pose $\mathfrak{m}=1$ [31]).

Il serait intéressant de se rendre compte, quelles sont les propriétés topologiques, métriques etc. des ensembles $A^{\mathfrak{m}}$, $B^{\mathfrak{m}}$, $D^{\mathfrak{m}}$, $\widehat{D^{\mathfrak{m}}}$ (ce seront, en majeure

[29]) La ligne droite et l'ensemble des nombres réels sont ici identifiés.

[30]) Si $\mathfrak{m}=1$, on peut énoncer ce corollaire d'une autre manière: La droite peut être décomposée en $2^{\aleph_0}$ ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$, superposables et disjoints deux à deux. C'est un résultat bien connu. — Comp. S. Mazurkiewicz: *Sur la décomposition d'un segment en une infinité d'ensembles non mesurables superposables deux à deux,* Fund. Math. 2 (1921), p. 9. La méthode dont nous nous servons constamment est, au fond, la même que celle de M. Mazurkiewicz dans la note citée.

[31]) Ce problème a été résolu indépendamment par M. S. Ejlenberg.

partie, des propriétés „négatives“): on n'en sait pas beaucoup: citons le résultat de M-lle Braun que D^1 ne peut pas être un F_σ.

On peut encore se démander, si (pour $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$) une définition effective de nos ensembles est possible.

§ 8. Application à un problème traité par M. Bieberbach[32]).

Nous allons présenter les résultats plus précis concernant le théorème intéressant annoncé récemment par M. Bieberbach[33]): que toute fonction de deux variables réelles se laisse représenter par superposition *(durch Ineinanderschieben)* de fonctions d'une seule variable et de la fonction $s(x, y) = x + y$.

Théorème 21. *Soit G un groupe abélien de puissance $\mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$, P et Q — deux ensembles de puissance $\mathfrak{s}$. Alors il existe deux fonctions, $f_1(x)$ et $f_2(y)$, dont les domaines sont P resp. Q, dont les contredomaines sont contenus dans G, et telles que toute fonction $F(x, y)$ dont le premier domaine est P, et le second — Q, peut être mise dans la forme:*

$$F(x, y) = \varphi(f_1(x) \bigcirc f_2(y)).$$

Démonstration:

On applique au groupe G le cor. 5: les ensembles $\widehat{A^1}$ et $\widehat{B^1}$ de ce corollaire sont de puissance $\mathfrak{s}$, donc on a:

$$\widehat{A^1} \sim P \quad \text{et} \quad \widehat{B^1} \sim Q.$$

C'est pourquoi, il existe une fonction f_1 qui transforme d'une façon biunivoque P en $\widehat{A^1}$, et une autre fonction biunivoque f_2 qui transforme Q en $\widehat{B^1}$. Alors les valeurs de la fonction $\zeta(x, y) = f_1(x) \bigcirc f_2(y)$ parcourent tous les éléments de G; $\zeta(x, y)$ fait correspondre d'une façon biunivoque l'ensemble des paires $[x, y]$, où $x \in P$, $y \in Q$ — à l'ensemble G; si $g = \zeta(x, y)$, posons: $\psi_1(g) = x$, $\psi_2(g) = y$ et $\varphi(g) = F(\psi_1(g), \psi_2(g))$.

Corollaire 22. *Il existe deux fonctions de variable réelle — $f_1(x)$ et $f_2(y)$ — telles que chaque fonction de deux variables réelles — $F(x, y)$ — peut être mise dans la forme:*

$$F(x, y) = \varphi(f_1(x) + f_2(y)).$$

Ceci découle directement du th. 21.

Il est encore à remarquer qu'on pourrait formuler des théorèmes analogues au th. 21 et cor. 22 — pour des fonctions d'un nombre (fini) quelconque de variables. Si p. ex. $\boldsymbol{K}$ est une classe de fonctions réelles[34]) qui remplit les conditions:

(**B.1**) toute fonction réelle d'une seule variable appartient à $\boldsymbol{K}$;

(**B.2**) si $f_1(x_1^{(1)} \ldots x_1^{(k)}) \in \boldsymbol{K}$ et $f_2(x_2^{(1)} \ldots x_2^{(l)}) \in \boldsymbol{K}$, alors $f_1(x_1^{(1)} \ldots x_1^{(k)}) + f_2(x_2^{(1)} \ldots x_2^{(l)}) = f_3(x_1^{(1)} \ldots x_2^{(l)}) \in \boldsymbol{K}$;

(**B.3**) si $f_4(x^{(1)} \ldots x^{(k)}) \in \boldsymbol{K}$ et si $\varphi(x)$ est une fonction réelle, alors $\varphi(f_4(x^{(1)} \ldots x^{(k)})) = f_5(x^{(1)} \ldots x^{(k)}) \in \boldsymbol{K}$;

— alors $\boldsymbol{K}$ contient toutes les fonctions réelles (à un nombre fini de variables).

La démonstration du cor. 22 s'appuie implicitement sur le théorème qui dit que l'ensemble de tous les nombres réels peut être bien ordonné; mais une démonstration effective est aussi possible[35]). A ce but[36]), faisons (ceci est bien simple) la transformation biunivoque des variables qui parcourent tous les nombres réels en des variables qui ne parcourent que l'intervalle $<0, 1>$ (sans extrémités). Représentons un x de cet intervalle sous la forme

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots \quad (a_n = 0 \text{ ou } 1),$$

et, en cas d'existence de deux développements différents, n'intéressons-nous que de celui pour lequel $a_n = 1$, à partir d'un indice n_0; posons ensuite:

$$f_1(x) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^3} + \ldots + \frac{a_n}{2^{2n-1}} + \ldots; \quad f_2(x) = \frac{1}{2} f_1(x).$$

Quoique les valeurs de la fonction $f_1(x) + f_2(y)$ ne parcourent ici qu'un sous-ensemble G' de l'ensemble $<0, 1>$, la méthode du raisonnement employé au th. 21 se transporte dans nos hypothèses spéciales sans aucun changement, après avoir substitué G' à G ($P = Q = <0, 1>$).

[32]) Quelques questions de ce § ont été déjà considérées dans ma communication *„Sur les problèmes concernant un critère de simplicité des notions“*, présentée au II. Congrès des Mathématiciens Polonais (Wilno, Septembre 1931).

[33]) L. Bieberbach: *Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem*, Journ. f. Math. **165** (1931), p. 92.

[34]) Nous appelons ainsi des fonctions dont les domaines coïncident avec l'ensemble des nombres réels et dont le contredomaine est contenu dans cet ensemble.

[35]) Ce qui fournit un exemple effectif d'un ensemble linéaire qui est somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$, disjoints et superposables deux à deux.

[36]) Nous reproduisons ici une construction due à M. Sierpiński, un peu plus simple que celle que nous avons trouvée tout d'abord.

§ 9. Perspectives.

Nous signalons ici encore trois théorèmes, dans le seul but de faire mieux ressortir les sujets possibles des recherches futures [37]). Puisque nous croyons qu'il faut les étudier d'une façon systématique (ce qui aura lieu probablement), en cherchant des lemmes généraux analogues à ceux que nous avons formulés, nous ne nous arrêtons presque pas sur les démonstrations.

Théorème 23. *Si $1 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ et si l est un entier positif, il existe de tels ensembles de nombres réels $X_1^{\mathfrak{m}}, X_2^{\mathfrak{m}}, \ldots, X_l^{\mathfrak{m}}$ que*

(23 a) $\overline{\overline{X}}{}_i^{\mathfrak{m}} = 2^{\aleph_0} \quad (i = 1, 2, \ldots, l);$

(23 b) *quel que soit le nombre réel g, il existe exactement $\mathfrak{m}$ représentations de g dans la forme:*

$$g = x_1 + x_2 + \ldots + x_l, \quad \text{où} \quad x_i \in X_i^{\mathfrak{m}}.$$

Théorème 24. *Si c et d sont des nombres réels non nuls et tels que $c^2 \neq d^2$, il existe un ensemble $L_{c,d}$ tel que tout nombre réel g admet une et une seule représentation dans la forme:*

$$g = cx + dy, \quad \text{où} \quad x, y \in L_{c,d}.$$

Théorème 25. *Supposons les conditions suivantes réalisées:*

(25.1) $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \mathfrak{s} \geqslant \aleph_0$;

(25.2) *A est un groupe de transformations biunivoques de l'ensemble B en soi;*

(25.3) *K est une classe régulière;*

(25.4) *A n'appartiennent pas à $K(\mathfrak{s})$.*

(25.5) *Si l'on a: $\varphi(x) = x$ sur un ensemble (des x) n'appartenant pas à K et si $\varphi \in A$, alors on a: $\varphi(x) = x$ sur tout ensemble B;*

(25.6) *quels que soient b et c, l'ensemble de tous les x pour lesquels il existe un φ de A tel que $\varphi(b) = x$ et $\varphi(x) = c$ — appartient à K.*

Alors il existe une classe A^1, de puissance $\mathfrak{s}$, composée de certaines transformations de A, et un sous-ensemble B^1 de B, aussi de puissance $\mathfrak{s}$, tels que pour tout $g \in B$, il existe une et une seule transformation φ de sorte que l'on ait:

$$\varphi \in A^1 \quad \text{et} \quad \varphi(g) \in B^1.$$

Afin de démontrer le cas: $\mathfrak{m} = 1$ du th. 23, on emploie une méthode analogue à celle du cor. 20: on remarque que Γ étant une famille de plans, de puissance $< 2^{\aleph_0}$, on peut trouver sur tout autre plan des points qui n'appartiennent à aucun de plans de la famille Γ (et qu'il en est de même pour les hyperplans $(n-1)$-dimensionnels de l'espace n-dimensionnel). L'extension à $\mathfrak{m} > 1$ est basée sur l'idée suivante: Si l'on construit les X_i^1 de telle façon qu'ils contiennent tous le nombre 0, et si R est un sous-ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ de X_2^1, on peut poser: $X_j^{\mathfrak{m}} = X_j^1$ — pour $j > 1$; $X_1^{\mathfrak{m}}$ égal à l'ensemble de toutes les sommes $x_1 + r$, où $x_1 \in X_1^1$, $r \in R$ [38]).

[37]) Le lecteur a remarqué d'ailleurs que quelques-uns des problèmes que nous avons étudiés n'ont été résolus qu'au moyen des hypothèses restrictives (concernant G ou $\mathfrak{m}$), peut être superflues.

La démonstration du th. 24 ressemble beaucoup à celle du cor. 19; le cas: $(c^2 - d^2)^2 = c^2 d^2$ — exige, à un certain endroit une modification du raisonnement.

Le th. 25 est une conséquence du lem. 3.

Observons, pour terminer, que les problèmes analogues à ceux que nous avons étudiés ici dans le cas des groupes infinis — peuvent être posés pour les groupes finis; certains de ces problèmes ne deviennent alors que des banalités, il y en a pourtant de tels qui paraissent assez intéressants.

Avril 1932.

[38]) C'est un artifice qui permet d'éviter le cor. 2 et de simplifier considérablement les raisonnements pour $\mathfrak{m} > 1$, mais que nous n'avons pas utilisé ailleurs parce qu'il semble n'être applicable que dans les hypothèses spéciales (p. ex. pour les groupes non-abéliens, on n'en peut rien tirer directement).