Sur les séries itérées des fonctions continues.

Par

Stefan Kempisty (Varsovie).

M. Sierpiński a introduit une classification de fonctions analogue à celle de M. Baire. La définition récurrente des classes s'obtient en remplaçant dans la définition de M. Baire les termes: „série convergente" par „série absolument convergente". Ainsi:

1⁰ la classe zéro est formée des fonctions continues,

2⁰ un ensemble de classes ayant été défini, la première classe de fonctions venant après cet ensemble de classes sera formée des fonctions qui n'appartiennent pas à cet ensemble de classes et qui sont représentables par les séries absolument convergentes de fonctions de cet ensemble.

MM. Sierpiński[1]) et Mazurkiewicz ont cité des exemples des fonctions qui, étant de la première classe de M. Baire, ne sont pas développables en une série absolument convergente de fonctions continus et par conséquent n'appartiennent pas à la première classe de M. Sierpiński. De plus, il résulte des recherches de M. Mazurkiewicz[2]) que toute fonction bornée de classe 1 de M. Baire appartient à la classe 2 au plus de M. Sierpiński, étant limite d'une suite uniformément convergente dont le terme général est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement[3]).

[1]) W. Sierpiński: Sur les fonctions dével. en séries abs. conv. de f. cont.: ce volume p. 18.

[2]) S. Mazurkiewicz: Sur les fonctions de classe 1: p. 32.

[3]) W. Sierpiński (loc. cit.) a démontré que toute différence de deux f. semi-continues sup. est la somme d'une série absolument convergente de f. continues.

Or nous allons montrer directement, sans l'usage de nombres transfinis, qu'une fonction bornée ou non qui est limite de fonctions continues peut être représentée par une série absolument convergente des séries absolument convergentes de fonctions continues. Ce théorème admet une généralisation. En effet, on établira que toute fonction de classe α de M. Baire appartient à la classe $\alpha+1$ de M. Sierpiński au plus. Le résultat ainsi obtenu nous permet à repondre affirmativement à la question suivante, posée par M. Sierpiński: les fonctions représentables analytiquement rentrent-elles dans un ensemble de fonctions, composé de fonctions continues et de séries absolument convergentes itérées de f. continues? [1]).

Comme les suites monotones nous fournissent le moyen de comparer les classes de M. Baire et de M. Sierpiński, il est presque indispensable de définir les classes analogues pour les suites monotones. L'idée d'une telle classification est enfermée dans les considérations de M. Young sur les fonctions semi-continues généralisées [2]).

Nons allons établir incidemment que l'ensemble formé par les fonctions continues et les suites monotones itérées de fonctions continues se confond avec l'ensemble E de fonctions de M. Baire.

M. Young a démontré [3]) que la plus grande (petite) limite d'une suite de fonctions semi-continues inférieurement (supérieurement) peut être représentée comme limite d'une suite non croissante (non décroissante) de fonctions de même nature. Dès lors, une fonction de la classe 1 de M. Baire étant, à plus forte raison, limite de fonctions semi-continues, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

I. Une fonction de classe 1 de M. Baire est limite d'une suite non croissante (non décroissante) de fonctions semi-continues inférieurement (supérieurement).

La démonstration de M. Young peut être simplifiée par la définition suivante des fonctions auxiliaires $v_m(x)$. Soit

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x);$$

1) Cf. W. Sierpiński loc. cit. p. 27.

2) W. H. Young: On functions and their associated sets of points. *Proc. Lon. Math. Soc.* 1913, v. 12. p. 260.

3) W. H. Young: Osscillating successions of continuous functions. *Proc. Lon. Math. Soc.* 1908, v. 6, p. 302.

$v_m(x)$ est une fonction dont la valeur au point x (de l'ensemble sur lequel $f(x)$ et $f_n(x)$ sont définies) est égale à la borne supérieure de la suite

$$f_m(x), f_{m+1}(x), \ldots, f_n(x) \ldots$$

Il est aisé à montrer que:

1° les fonctions $v_m(x)$ sont semi-continues inférieurement, si $f_n(x)$ les sont,

2° la suite de fonctions $v_m(x)$ est non croissante,

3° $$\lim v_m(x) = f(x).$$

Le raisonnement est valable pour une fonction $f(x)$ bornée ou non, mais finie. En effet, la suite

$$f_m(x), f_{m+1}(x) \ldots, f_n(x).$$

étant convergente au point x, elle est bornée, par conséquent sa borne supérieure $v_m(x)$ existe.

II. Toute fonction qui est limite d'une suite monotone de fonctions semi-continues du même type[1]) est développable en une série absolument convergente de séries absolument convergentes de fonctions continues.

Pour fixer les idées nous allons considérer une suite non décroissante de fonctions semi-continues supérieurement, soit $v_m(x)$.

Formons la série

$$v_1(x) + [v_2(x) - v_1(x)] + \ldots + [v_m(x) - v_{m-1}(x)] + \cdots, \tag{1}$$

qui a pour somme la fonction $f(x)$.

La suite de fonctions $v_m(x)$ étant non décroissante, tous les termes de la série (1) sauf le premier sont $\geqslant 0$. On a donc

$$v_m(x) = v_1(x) + \sum_{k=1}^{k=m} | v_k(x) - v_{k-1}(x) |$$

et la somme des valeurs absolues des termes de la série (1) est égale à

$$- v_1(x) + | v_1(x) | + f(x).$$

[1]) C'est-à-dire toutes semi-continues inférieurement, ou toutes semi-continues supérieurement.

La série (1) qui a pour somme $f(x)$ est alors absolument convergente[1]).

Or ses termes sont les différences de fonctions semi-continues supérieurement et par suite, d'après un théorème de M. Sierpiński[2]), sont développables en séries absolument convergentes de fonctions continues.

Des théorèmès I et II on déduit immédiatement:

III. Une fonction de première classe de M. Baire est représentable par une série absolument convergente de séries absolument convergentes de fonctions continues.

Elle est donc de la deuxième classe au plus de M. Sierpiński.

L'inverse de ce corollaire n'est pas vrai, puisqu'il existe une fonction partout discontinue qui appartient à la deuxième classe de M. Sierpiński.

En effet, soit $f_n(x)$ la fonction définie dans l'intervalle $(0, 1)$ par les conditions suivantes: 1° elle est égale à zéro pour les valeurs de x rationnelles $\frac{p}{q}$, où q est premier avec p et $\leqslant n$; 2° $f(x)=1$ pour toutes les autres valeurs de x. On voit que la fonction $f(x)$, limite de $f_n(x)$, est égale à zéro pour les valeur rationnelles et à 1 — pour les valeurs irrationnelles de x. Or les fonctions $f_n(x)$ sont semi-continues inférieurement, ayant un nombre fini de discontinuités de première espèce, où

$$f_n(x_0) < \lim_{x=x_0} f_n(x).$$

Or, la suite

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

étant non croissante, la fonction $f(x)$ est, d'après le théorème II, de classe 2 au plus de M. Sierpiński.

En même temps, étant partout discontinue, elle appartient à la deuxième classe de M. Baire.

Les résultats obtenus peuvent être étendus, comme nous l'avons remarqué, à une classe quelconque de M. Baire.

[1]) On voit que le raisonnement est valable pour une fonction $f(x)$ non bornée mais finie.

[2]) W. Sierpiński loc. cit. p. 18.

Une fonction semi-continue est, d'après une remarque de M. Baire, limite d'une suite monotone de fonctions continues [1]). Nous aurions donc à faire dans les raisonnements précédents avec les suites monotones de suites monotones de fonctions continues.

M. Young désigne une fonction semi-continue inférieurement par l (lower semi-continuous function) et une fonction semi-continue supérieurement — par u [2]). Comme le premier de ce deux types correspond aux suites non décroissantes, il représente par lu une suite non décroissante de fonctions semi-continues supérieurement. Or, une suite non décroissante de fonctions semi-continues inférieurement étant une fonction semi-continue inférieurement [3]), une fonction ll est un l. On n'obtient donc que deux nouvaux types: ul et lu des fonctions limites d'une suite double de fonctions continues. M. Young se limite dans ses études aux fonctions qui peuvent être représentées par un nombre fini de lettres alternées u et l [4]).

Voici une définition générale de classes considerées par M. Young:

1° les fonctions continues forment la classe zéro;

2° la classe 1 se compose de fonctions (discontinues) de deux types: type u — ce sont les limites des suites non croissantes de fonctions continues, et type l — les limites de suites non décroissantes de fonctions continues.

3° la classe α est formée des fonctions qui n'étant pas de classe inférieure à α sont limites des suites monotones de fonctions de classes inférieures à α et du même type; les fonctions de classe α se divisent en deux types, u et l, suivant qu'il sont limites de suites non croissantes ou non décroissantes de fonctions de classes inférieures à α et du même type.

Pour suivre le même ordre d'idées que dans les raisonnements sur les fonctions de première classe, nous allons démontrer le théorème suivant:

IV. Une fonction de classe α de M. Baire est de

[1]) R. Baire: Leçons sur les fonctions discontinues; Paris, 1905, p. 124—5

[2]) W. H. Young: A new method in the theory of integration. *Proc. Lon. Math. Soc.* 1911, v. 9, p. 15—25.

[3]) W. H. Young: loc. cit. p. 16.

[4]) W. H. Young: On functions and their associated sets of points. *Proc. Lon. Math. Soc.* 1913, v. 12, p. 260.

classe $\alpha+1$ au plus de M. Young et de deux types possibles (u et l).

Pour $\alpha=0$ le théorème est évident. Pour $\alpha=1$, il vient d'être établi. En effet, en remarquant que les fonctions semi-continues constituent la classe 1 de M. Young, nous pouvons énoncer le théorème I dans les nouvaux termes comme voici:

I! Une fonction de classe 1 de M. Baire est de classe 2 au plus de M. Young et de deux types possibles (u et l).

Maintenant, pour avoir le droit d'appliquer l'induction transfinie, il nous faut démontrer le lemme suivant:

Si toute fonction de classe $\beta<\alpha$ de M. Baire est de classe $\alpha+1$ au plus de M. Young et de deux types possibles, il en est de même d'une fonction de classe α de M. Baire.

Soit

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots \tag{2}$$

une suite de fonctions dont la limite $f(x)$ est de classe α de M. Baire. Les termes de cette suite sont donc, d'après l'hypothèse du lemme, des fonctions de classes de M. Young inférieures à $\alpha+1$ et de deux types. Donc, nous pouvons les considérer comme limites de suites non décroissantes de fonctions de classes inférieures à α; posons:

$$f_n = \lim_{k=\infty} f_{nk}.$$

Soit v_{11} la fonction, dont la valeur au point x est égale à la plus grande des valeurs $f_1(x)$ et $f_2(x)$, ce qu'on peut écrire

$$v_{11} = \max(f_1, f_2).$$

Ensuite posons·

$$v_{1k} = \max(v_{1,k-1}, f_{k+1}).$$

Il est aisé à démontrer par l'induction transfinie que les fonctions v_{1k} sont de classe α au plus de M. Young et du type l.

En effet

$$\max(f_1, f_2) = \lim_{k=\infty} \max(f_{1k}, f_{2k})$$

et la suite de $\max(f_{1k}, f_{2k})$ est non décroissante. Supposons, pour moment, que le maximum de deux fonctions du même type de classe $\beta<\alpha$ de M. Young est une fonction de classe β de M. Young au plus. Ainsi les fonctions max (f_{1k}, f_{2k}) sont de classes monotones $\beta < \alpha$. Donc, la fonction $\max(f_1, f_2)$, comme limite d'une suite non décroissante de fonctions de classes inférieures à α, est de classe α au plus et du type l. Par l'induction (finie) on montre le même pour toute fonction v_{1k}.

Définissons d'une manière analogue que v_{1k} les fonctions v_{mk}, en partant du terme f_m de la suite (2) au lieu de f_1:

$$v_{m1} = \max(f_m, f_{m+1})$$
$$v_{mk} = \max(v_{m,\,k-1}, f_{m+k+1}).$$

Ces fonctions sont de même de classe α au plus de M. Young et du type l.

Soit

$$v_m = \lim_{k=\infty} v_{mk}.$$

Admettons, pour le moment, qu'une suite non décroissante de fonctions de classe α au plus de M. Young et du type l est de classe α au plus et de même type [1]). La suite

$$v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}, \ldots, v_{mk}, \ldots$$

étant non décroissante, nous en déduisons que la fonction v_m est de classe α au plus de M. Young et du type l.

Considérons la suite

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m, \ldots:$$

elle est non croissante par définition. Or, la fonction $f(x)$ est limite de cette suite, elle est par conséquent de classe $\alpha + 1$ au plus de M. Young.

Pour achéver la démonstration il nous reste à établir le lemme mentionné:

La limite d'une suite non décroissante de fonctions de classe α au plus de M. Young et du type l est une fonction de classe α au plus de M. Young et du type l.

Soit une suite double de fonctions de classes inférieures à α:

[1]) Sans ce lemme on démontrerait seulement que $f(x)$ est de classe $\alpha + 2$ au plus de M. Young.

$$
(3)\qquad
\begin{array}{l}
f_{11} \leqslant f_{12} \leqslant f_{13} \cdots \leqslant f_{1k} \leqslant \cdots \\
f_{21} \leqslant f_{22} \leqslant f_{23} \cdots \leqslant f_{2k} \leqslant \cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
f_{n1} \leqslant f_{n2} \leqslant f_{n3} \cdots \leqslant f_{nk} \leqslant \cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

telle que $f_n = \lim\limits_{k=\infty} f_{nk}$, le fonctions f_n formant une suite non décroissante ayant pour limite $f(x)$. Les suites verticales

$$f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}, \ldots, f_{nk}, \ldots,$$

comme on voit sans peine, peuvent être faites non décroissantes si l'on remplace généralement f_{nk} par $\max(f_{1k}, f_{2k}, \ldots, f_{nk})$ [1].

Alors la suite double (3) peut être considérée comme non décroissante.

Prenons les termes se trouvant sur la diagonale: ils forment la suite

$$f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots, f_{nn}, \ldots$$

Cette suite est non décroissante et a pour limite la fonction $f(x)$. Or, les fonctions f_{nn} étant de classes inférieures à α, de M. Young la fonction limite $f(x)$ est de classe α au plus de M. Young.

Ainsi le théorème IV se trouve démontré. Comme une conséquence immédiate de ce théorème, nous pouvons énoncer le corollaire suivant:

Toute fonction représentable analytiquement [2] *rentre dans la classification de M. Young.*

De même, nous allons établir que la classification de M. Sierpiński enferme toutes les fonctions représentables analytiquement. Il suffit pour cela démontrer le théorème suivant:

V. *Une fonction de classe α de M. Young est de classe α au plus de M. Sierpiński.*

Or ce théorème est évident pour $\alpha = 0$. Pour $\alpha = 1$ c'est un cas particulier d'un théorème de M. Sierpiński sur la différence de deux fonctions semi-continues [3], puisque une limite d'une suite

[1] W. H. Young: A new method in the theory of integration. *Proc. Lon. Math. Soc.* 1911, v. 9, p. 18.

[2] H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement. *Journ. de Math.* 1905, p. 152.

[3] W. Sierpiński loc. cit. p. 18.

monotone de fonctions continues est une fonction semi-continue. Ensuite, en posant $\alpha=2$, on obtient le théorème II démontré plus haut.

Il suffit donc à montrer que, si le théorème V est vrai pour tout $\alpha<\beta$, il en est de même pour $\alpha=\beta$.

Considérons une fonction $f(x)$ de classe β de M. Young: elle est limite d'une suite monotone de fonctions de classes inférieures à β. Soit

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

cette suite; formons la série

$$f_1+(f_2-f_1)+(f_3-f_2)+\ldots+(f_n-f_{n+1})+\ldots \tag{4}$$

qui a pour limite la fonction $f(x)$.

Tous les termes de cette série, sauf le premier, sont du même signe: par conséquent elle est absolument convergente. Designous par α_n la classe de M. Young de la fonction f_n. Or

$$\alpha_n<\beta,$$

par suite, d'après l'hypothèse admise, toute fonction f_n est la somme d'une série absolument convergente de fonctions de classes inférieures à α_n de M. Sierpiński. La différence f_n-f_{n-1} est donc une série absolument convergente de fonctions de classe inférieure au plus grand de deux nombres α_n et α_{n-1}. Les termes de la série (4) sont alors de classe inférieure à β de M. Sierpiński et la somme $f(x)$ de cette série est de classe β au plus.

Des théorèmes IV et V on déduit immédiatement:

VI. *Toute fonction de classe α de M. Baire est de classe $\alpha+1$ au plus de M. Sierpiński.*

Comme d'autre part une fonction de classe α de M. Sierpiński est au plus de classe α de M. Baire, on voit que toute fonction qui entre dans l'une de classifications rentre dans l'autre.

Nous avons ainsi établi quelques relations entre les classes de MM. Baire, Sierpiński et Young, étant d'ailleur loin d'épuiser la question. Plusieurs problèmes se posent sur ce sujet. Nous avons p. ex. cité plus haut un exemple d'une fonction qui est de classe 2 dans chacune de ces trois classifications; or il serait intéressant à connaître des exemples de fonctions de classe α de M. Baire jouissant de la même propriété. Ensuite il faudrait former des exemples analogues à ces de MM. Sierpiński et Mazurkiewicz, c'est à dire, d'une fonction de classe α de M. Baire qui n'est pas de classe α de M. Sierpiński et par suite de M. Young. Nous serions alors convaincus que la classification de M. Young est toujours en retard sur celle de M. Sierpiński, et celle-ci — sur la classification de M. Baire, le retard ne dépassant pas une classe.

Varsovie, mai 1920.