Une remarque sur les fonctions monotones.

Par

Alexandre Rajchman (Varsovie).

I. L'objet de cette note est la démonstration du théorème suivant:

La somme d'une série convergente des fonctions non décroissantes, telles que la dérivée de chacune d'elles s'annule presque partout, est une fonction non décroissante à dérivée nulle presque partout (cela veut dire: dans un ensemble, dont le complémentaire est à mesure lebesguienne nulle).

Comme application nous montrons que la fonction

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{Enx}{n^3} \tag{1}$$

est une fonction pantachiquement discontinue à dérivée presque partout nulle (Ea désigne le plus grand entier ne dépassant pas a) et nous formons un procédé très simple permettant de construire des fonctions continues croissantes (au sens strict) à dérivée presque partout nulle. Des exemples particuliers de telles fonctions ont été publiés par MM. Denjoy[1]) et Sierpiński[2]).

II. M. de la Vallée Poussin introduit dans son „Cours d'Analyse Infinitésimale" (I vol, troisième édition, page 267, § 252) une définition qui revient, au fond, à la suivante:

1) Nous appelons *variation* d'une fonction[3]) $f(x)$ dans un intervalle (a, b) $(a < b)$ la différence $f(b) - f(a)$.

[1]) Journal des Mathématiques 1915

[2]) Giornale di Matematiche Vol. 54, 1916.

[3]) M. de la Vallée Poussin ne considère que les fonctions continues; cette restriction est inutile, nous ne la suivons pas.

2) Soit G un ensemble ouvert[1]), et soient

$$(a_1, b_1)\ (a_2, b_2) \ldots (a_n, b_n)$$

les intervalles (ouverts, n'empiétant pas les uns sur les autres) qui le composent.

Soit $f(x)$ une fonction, pour laquelle la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} [f(b_n) - f(a_n)] = V_G[f(x)] \tag{2}$$

est absolument convergente[2]) (et par conséquant admet une somme indépendante de l'ordre des termes).

Soit $V_G[f(x)]$ la somme de la série (2); c'est cette quantité $V_G[f(x)]$ que nous appelons variation de la fonction $f(x)$ dans l'ensemble G.

3) Soit F un ensemble fermé (situé tout entier dans un intervalle donné (A, B)). Soit G l'ensemble complémentaire de F (par rapport à l'intervalle (A, B)). On appelle $V_F[f(x)]$ — variation de la fonction $f(x)$ dans l'ensemble F — le complément de la variation dans G, c'est-à-dire on a, par définition,

$$V_F[f(x)] = f(A) - f(B) - V_G[f(x)]. \tag{3}$$

Il résulte immédiatement de cette définition qu'à chaque ensemble fermé F et à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre une suite d'intervalles $(\alpha_1, \beta_1)\ (\alpha_2, \beta_2) \ldots (\alpha_n, \beta_n)$ telle que l'on ait

$$V_F[f(x)] < \sum_{i=1}^{i=n} [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] < V_F[f(x)] + \varepsilon.$$

III. Dans ce qui suit nous établissons[3]) tout d'abord les théorèmes suivants:

[1]) „On appelle ouvert tout ensemble dont tous les points sont intérieurs. On démontre que tout ensemble ouvert (linéaire) est une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intérieurs d'intervalles n'empiétant les uns sur les autres... Tout ensemble fermé est complémentaire d'un ensemble ouvert et réciproquement". (W. Sierpiński, „Sur une définition de l'intégrale..." — Prace matematyczno-fizyczne, tome XXX (Varsovie, 1919) page 172).

[2]) Cette condition est remplie par toute fonction à variation bornée.

[3]) Ces théorèmes nous paraissent à peu près évidents (surtout le premier) Néanmoins, par acquit de consience, nous les faisons suivre de démonstrations détaillées.

1) Soit

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\varphi(x) \tag{4}$$

une série convergente pour $a \leqq x \leqq b$, dont tous les termes:

$$f_1(x)\ f_2(x)\ldots f_n(x)\ldots \tag{5}$$

sont des fonctions non décroissantes [1]) de la variable x:

soit $\varphi(x)$ la somme de la série (4),

soit E un ensemble ouvert ou fermè (situé tout entier dans l'intervalle (a, b)),

soient enfin

$$V_E[f_i(x)] \quad (i=1, 2, \ldots) \qquad V_E[\varphi(x)]$$

respectivement les variations des termes et de la somme de la série (4);

nous affirmons que l'on a dans ces conditions:

$$V_E[\varphi(x)]=\sum_{i=1}^{i=\infty} V_E[f_i(x)]. \tag{6}$$

2) Soit $f(x)$ une fonction non décroissante [2]) de la variable x,

k un nombre positif,

E_k un ensemble fermé des valeurs de x, tel que l'on ait pour tout [3]) x appartenant à E_k

$$\limsup_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>k \tag{7}$$

soit e_k la mesure [4]) de l'ensemble E_k,

soit $V_E[f(x)]$ la variation de $f(x)$ dans l'ensemble E_k;

nous affirmons que l'on a dans ces conditions:

$$V_E[f(x)] \geqq k e_k. \tag{8}$$

3) Le théorème précédent subsiste, si l'on remplace dans son énoncé l'inégalité (7) par la suivante

$$\limsup_{h\to+0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}>k. \tag{7 bis}$$

[1]) Ou bien: non croissantes.

[2]) Ou plus généralement: à variation bornée.

[3]) La relation $x \subset E$ entraîne l'inégalité (7), mais nous ne supposons pas la reciproque.

[4]) Au sens de H. Lebesgue.

IV. Nous en déduisons le résultat suivant:

„Si la variation d'une fonction non décroissante $f(x)$ dans un ensemble fermé est nulle, on a presque partout dans cet ensemble: $f'(x)=0$".

V. Nous aurons besoin encore des énoncés suivants:

1) Soit G_k un ensemble fermé, tous les points duquel sont des points de continuité de la fonction non décroissante $f(x)$ et remplissent l'inégalité suivante:

$$\lim_{h\to+0}\inf\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<k; \tag{9}$$

soit g_k la mesure de G_k; avec ces notations on a:

$$V_{G_k}[f(x)]<kg_k.$$

2) Si la dérivée $f'(x)$ (d'une fonction non décroissante $f(x)$) s'annule dans tous les points d'un ensemble fermé, la variation de la fonction $f(x)$ dans cet ensemble est nulle.

VI. Après avoir énoncé les résultats passons aux démonstrations.

Celle du théorème 1 de § III est immédiate.

Soit

$$(a_1,\ b_1),\quad (a_2,\ b_2)\ldots(a_n,\ b_n)\ldots \tag{10}$$

l'ensemble des intervalles, qui constituent l'ensemble E dans le cas où celui-ci est ouvert; nous emploierons les mêmes notations (10) pour désigner les intervalles contigus à l'ensemble E dans le cas où il est fermé.

Avec ces notations l'équation (6) (que nous avons à démontrer) prend la forme suivante:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}[f_n(b_i)-f_n(a_i)]=\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=\infty}[f_n(b_i)-f_n(a_i)]\quad(b_i>a_i). \tag{11}$$

Mais on a, par hypothèse, quels que soient n et i:

$$f_n(b_i)\geqq f_n(a_i);$$

donc les termes de la série (11) sont tous positifs ou nuls.

Or dans une série double à termes non négatifs il est loisible d'intervertir l'ordre des sommations, donc l'équation (11) se vérifie c. q. f. d.

VII. Avant d'aller plus loin faisons la remarque simple suivante [1]):

Pour qu'un ensemble M des points de l'intervalle (A, B) contienne tous les points de cet intervalle, il suffit qu'il jouisse des propriétés suivantes:

1) Toute suite croissante des éléments de M admet une limite appartenant à M.

2) Le point A appartient à l'ensemble M.

3) Tout point de l'ensemble M (sauf le point B), est le point-limite d'une suite décroissante des éléments de M.

En effet, supposons, par l'impossible, qu'un t $(A < t < B)$ n'appartienne pas à M. Soit $M(t)$ l'ensemble des points de M qui ne sont pas postérieurs au point t. Cet ensemble n'est pas vide (proprieté 2) et (ce qui résulte de la propriétè 1) il possède un élément dernier α_t

$$\alpha_t \subset M(t) \subset M \tag{12}$$

$$A \leqq \alpha_t \leqq t \leqq B. \tag{13}$$

Il est impossible que l'on ait $\alpha_t < t$. En effet: le point α_t est le point-limite d'une suite décroissante des points appartenant à M (propriété 3); si $\alpha_t < t$ cette suite contient une suite partielle des points appartenant à $M(t)$. Donc α_t n'est pas le dernier élément de M, ce qui contredit sa définition. Donc $\alpha_t = t$; par conséquant (relation (12)) $t \subset M$ ce qui contredit notre hypothèse absurde. C. q. f. d.

VIII. Nous allons rattacher le théorème 2 de § III au lemme suivant:

„L'accroissement $f(B) - f(A)$ que subit une fonction $f(x)$ non décroissante dans un intervalle (A, B) est supérieur ou égal au produit ke_k, k désignant un nombre positif quelconque — e_k la mesure d'un ensemble fermé, dont tout point x remplit l'inégalité suivante:

$$\limsup_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > k \text{“} \tag{14}$$

Démonstration. Soit E_k un ensemble ouvert ou fermé dont tout élément x remplit la condition (14). Soit $E_k(t)$ l'ensemble des éléments de E_k non postérieurs au point t (le produit de l'ensemble E_k et de l'intervalle (A, t)); — soit $e_k(t)$ la mesure de l'ensemble $E_k(t)$ [2]).

[1]) Au fond nous ne faisons ici que rappeler la définition des nombres réels.

[2]) On a
$$E_k(B) = E_k$$
$$e_k(B) = e_k$$
$E_k(t)$ est fermé comme produit de deux ensembles fermés.

Soit enfin M l'ensemble des solutions de l'inégalité suivante:

$$f(t)-f(A)\geqq k e_k(t). \tag{15}$$

Nous allons prouver, que l'ensemble M jouit des trois propriétés énoncées au § VII.

En effet: 1° Soit $t_1, t_2 \ldots t_n \ldots$ une suite croissante des élements de M, — soit T leur limite

$$T=\lim_{n\to\infty} t_n. \tag{16}$$

L'inégalité (15) étant remplie, par hypothèse, pour $t=t_n$ on a aussi [1])

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n)-f(A)\geqq k \lim_{n\to\infty} e_k(t_n), \tag{17}$$

mais $e_k(t)$ est une fonction continue de t, $f(t)$ — une fonction non décroissante, donc:

$$\lim_{n\to\infty} e_k(t_n)=e_k(T); \quad \lim_{n\to\infty} f(t_n)\leqq f(T),$$

par conséquant:

$$f(T)-f(A)\geqq k e_k(T) \tag{18}$$

donc toute suite croissante des éléments de M admet une limite appartenant à M.

2° Pour $t=A$ les deux membres de l'inégalité (15) s'annulent; donc le point A appartient à l'ensemble M.

3° Soit t un élément de M, différent du point B. Deux cas sont à distinguer: ou bien x appartient à E_k, ou bien n'y appartient pas. Dans le premier cas on a

$$\limsup_{h\to+0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}>k; \tag{14}$$

par conséquant il existe une suite décroissante vers zéro des nombres positifs $h_1, h_2 \ldots h_n \ldots$ tels que l'on ait:

$$f(t+h_n)-f(t)>k h_n. \tag{19}$$

En ajoutant membre-à-membre les inégalités (15) et (19) et en combinant le résultat obtenu avec l'inégalité évidente:

$$h_n\geqq e_k(t+h_n)-e_k(t) \tag{20}$$

[1]) $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$ existe, parce que $f(t)$ est une fonction croissante.

on trouve.

$$f(t+h_n)-f(A) \geqq k e_k(t+h_n) \tag{21}$$

ce qui prouve que tout point de M appartenant à E_k, (excepté le point B, s'il y a lieu) est le point-limite d'une suite décroissante des éléments de M.

Supposons maintenant que t n'appartient pas à E_k; E_k étant fermé, il existe tout un intervalle $(x, x+h)$ des points n'appartenant pas à E_k; donc il est facile de former une suite $h_1, h_2 \dots h_n \dots$ décroissante vers zéro et telle que l'on ait

$$0 = e_k(t+h_n) - e_k(t). \tag{22}$$

Or $f(x)$ étant une fonction non décroissante, on a

$$f(t+h_n)-f(t) \geqq 0. \tag{23}$$

Des inégalités (15), (22) et (23) résulte immédiatement l'inégalité (21) qui prouve maintenant que tout point de M remplit la condition 3° de § VII. Donc l'ensemble M remplit les trois conditions du § VII; par conséquant il contient tous les points de l'intervalle (A, B) (y compris le point B), ce qui prouve le théorème énoncé.

IX. Le théorème précédent subsiste, si l'on remplace l'inégalité (14) par la suivante:

$$\limsup_{h=+0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} > k. \tag{14 bis}$$

Pour le prouver, il suffit de considérer la fonction

$$\varphi(x) = -f(-x).$$

On a

$$\varphi(-x+h)-\varphi(-x) = f(x)-f(x-h); \tag{24}$$

par conséquant: dire que l'on a

$$\limsup_{h=+0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} > k \tag{14 bis}$$

pour tout x compris entre A et B c'est autant que dire:

„l'inégalité suivante:

$$\limsup_{h=+0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} > k \tag{25}$$

est remplie pour tout x appartenant à l'intervalle $(-B, -A)$".

En vertu du lemme de § précédent nous pouvons en conclure:

$$\varphi(-A)-\varphi(-B) \geqq k e_k$$

c'est-à-dire

$$f(B)-f(A) \geqq k e_k \tag{26}$$

c. q. f. d.

X. Il est évident, que dans les énoncés de §§ VIII et IX on peut remplacer la quantité $f(B)-f(A)$ par la variation relative à un système quelconque d'intervalles [1]) couvrant l'ensemble E_k [2]).

En effet: soient $(a_1, b_1)\dots(a_n, b_n)$ les intervalles en question; soit $E_k^{(i)}$ la partie de l'ensemble E_k située dans l'intervalle (a_i, b_i), soit $e_k^{(i)}$ — la mesure de l'ensemble $E_k^{(i)}$ [3]).

D'après les §§ VIII et IV on a

$$f(b_i)-f(a_i) \geqq k e_k^{(i)} \tag{27}$$

par conséquant

$$\sum [f(b_i)-f(a_i)] \geqq k \sum e_k^{(i)} = k e_k \tag{28}$$

c. q. f. d.

XI. La démonstration du théorème 2 de § III devient presque immédiate.

Soit $f(x)$ la fonction non décroissante donnée et P un ensemble fermé, comprenant E_k comme sous-ensemble ou bien identique à E_k.

Soit ε un nombre positif donné arbitrairement. D'après la remarque finale de § II on peut former une suite d'intervalles: $(a_1, b_1)\dots(a_n, b_n)\dots$ telle que l'on ait

$$V_p[f(x)] \leqq \sum [f(b_i)-f(a_i)] \leqq V_p[f(x)]+\varepsilon. \tag{29}$$

[1]) Les intervalles du système sont en nombre fini, ou bien il forment une infinité denombrable. Nous les supposons n'empiétant pas les uns sur les autres,

[2]) L'ensemble E_k peut être aussi bien considéré comme celui de § VIII (satisfaisant à l'inégalité 14), que comme celui de § IX.

[3]) On a évidemment

$$E_k = \Sigma E_k^{(i)}; \quad e_k = \Sigma e_k^{(i)}.$$

En combinant cette inégalité avec l'inégalité (28) du § précédent on trouve pour tout $\varepsilon > 0$

(30) $$V_p[f(x)] + \varepsilon \geqq k e_k$$

par conséquant

(31) $$V_p[f(x)] \geqq k e_k.$$

XII. Si l'on suppose:

(32) $$V_p[f(x)] = 0,$$ (33) $$k > 0$$

alors (en vertu de l'inégalité (31) de § precédent) on a:

(34) $$e_k = 0.$$

Il en résulte que les ensembles des points de P, satisfaisant à l'une ou à l'autre de deux inégalités suivantes:

(14) $$\limsup_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > k;$$

(14 bis) $$\limsup_{h \to +0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} > k$$

sont de mesure nulle.

(En effet: les ensembles en question sont mesurables (cf. par ex. de la Vallée Poussin, pages 64 et 71). Si l'un d'eux était de mesure positive, il contiendrait un sous-ensemble fermé de mesure positive [1]), ce qui contredit l'égalité (34))

Nous allons désigner par $Z(k)$ ces ensembles. Il est évident, que l'on a:

(35) $$Z(0) = \sum_{n=1}^{n=\infty} Z\left(\frac{1}{n}\right).$$

Chacun des termes de la somme (35) étant de mesure nulle, l'ensemble-somme $Z(0)$ l'est aussi; en d'autres termes: l'ensemble des

[1]) En effet: soit m $(m > 0)$ la mesure d'un ensemble M des points de l'intervalle (A, B). La mesure de l'ensemble complémentaire $C_{AB}(M)$ est égale à $B - A - m$; en d'autres termes: quel que soit $\varepsilon > 0$, $C_{AB}(M)$ peut être couvert par un système d'intervalles de longueur moindre que $B - A - m + \varepsilon$. L'ensemble contigu à ce système d'intervalles est un ensemble fermé de mesure plus grande que $m - \varepsilon$.

points de P satisfaisant à l'une (au moins) de deux inégalités suivantes:

$$(36)\qquad \limsup_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0; \qquad \limsup_{h\to+0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}>0$$

est de mesure nulle, c'est-à-dire: on a presque partout dans P

$$(37)\qquad \limsup_{h\to\pm0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

$f(x)$ étant une fonction non décroissante, l'égalité (37) équivaut à l'égalité:

$$(38)\qquad f'(x)=0.$$

Le théorème de § IV est donc démontré.

XIII. Le théorème 1 de § V est au fond identique au théorème 2 de § III. Pour le prouver il suffit de considérer la fonction inverse par rapport à $f(x)$ ($y=\varphi(x)$, définie comme fonction implicite par l'équation [1]) $x=f(y)$). Mais il est plus simple (quoique plus long) de reprendre les raisonnements de § VIII et X, en énonçant tout d'abord le lemme suivant:

„La variation $V_{G_k}[f(x)]$ d'une fonction non décroissante $f(x)$ dans un ensemble fermé G_k, dont tous les points x sont des points de continuité de la fonction $f(x)$ et satisfont à l'inégalité suivante:

$$(39)\qquad \liminf_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<k$$

est inférieure ou égale au produit $k.(B-A)$. — (A, B) désigne ici un intervalle quelconque, comprenant l'ensemble G_k (comme sous-ensemble)“.

La démonstration est calquée sur celle de § VIII. Appelons $G_k(t)$ l'ensemble des élements de G_k non postérieurs à t. Posons pour abréger:

$$(40)\qquad V(t)=v_{G_k(t)}[f(x)].$$

Il est aisé de voir, que $V(t)$ est une fonction continue de t (pour tous les points de l'intervalle (A, B)). (En effet: la fonction $V(t)$

[1]) Si dans tout un intervalle (a, b) on avait: $f(y)=c$, on poserait par ex

$$\varphi(c)=\frac{a+b}{2}.$$

est constante dans tous les intervalles contigus à G_k, donc elle est continue en déhors de G_k. On a toujours (pour $h > 0$)

$$0 \leqq V(t+h) - V(t) \leqq f(t+h) - f(t) \tag{41}$$

$$0 \leqq V(t) - V(t-h) \leqq f(t) - f(t-h) \tag{42}$$

donc $V(t)$ est continue dans tous les points de continuité de $f(t)$, par conséquant dans tous les points de G_k).

Soit M l'ensemble des solutions de l'inégalité suivante

$$k(t-A) \geqq V(t). \tag{43}$$

On va voir que l'ensemble M remplit les trois conditions de § VII.

En effet: 1° Les deux membres de l'inégalité-égalité (43) étant des fonctions continues, l'ensemble M est fermé. Donc la condition 1 de § VII est remplie.

2° Pour $t = A$ les deux membres de (43) s'annulent. Donc: $A \subset M$.

3° Soit t un élement de M différent du point B. Si t appartient à G_k, il existe (en vertu des inégalités (39) et (41)) une suite des nombres positifs $h_1, h_2 \dots h_n \dots$ décroissants et tendant vers zéro, tels que

$$V(t+h_n) - V(t) < kh_n. \tag{44}$$

Les inégalités (43) et (44) donnent:

$$V(t+h_n) \leqq k(t+h_n - A). \tag{45}$$

Si t n'appartient pas à G_k, on forme une suite $h_1, h_2 \dots h_n \dots$ telle que

$$V(t+h_n) - V(t) = 0. \tag{46}$$

En combinant les inégalités (43) et (46) on retrouve l'inégalité (45), ce qui prouve que l'ensemble M remplit la condition 3 de § VII.

Donc l'ensemble M contient tous les points de l'intervalle (A, B), c. q. f. d.

XIV. Pour prouver, que dans l'énoncé du § précédent l'inégalité (39) peut être remplacée par la suivante:

$$\liminf_{h \to +0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < k \tag{39 bis}$$

il suffit de répéter textuellement les raisonuements de § IX en y remplaçant le signe $>$ par $<$ et *lim sup* par *lim inf*.

XV. Il est évident, que dans les énoncés de §§ XIII et XIV on peut remplacer la quantité $(B-A)$ par la somme des longueurs des intervalles, formant un système quelconque couvrant G_k.

XVI. La démonstration du théorème 1 de § V est immédiate. Soit Q un ensemble fermé (de mesure q) comprenant G_k comme sous ensemble, ou bien identique à G_k. Formons une suite d'intervalles $(a_1, b_1)\ldots(a_n, b_n)\ldots$ telle que

(47) $$q < \sum (b_n - a_n) < q + \varepsilon.$$

D'après ce qui précède, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$v_Q[f(x)] \leqq k(q+\varepsilon)$$

par conséquant

(48) $$v_Q[f(x)] \leqq kq$$

c q. f. d.

XVII. Le théorème 2 de § V est évident. Soit Q un ensemble fermé dans tous les points duquel on a $f'(x) = 0$; en vertu de l'inégalité (48) de § précédent, on a quel petit que soit $k > 0$

(49) $$v_Q[f(x) \leqq kq$$

donc

(50) $$v_Q[f(x)] = 0$$

c. q. f. d,

XVIII. Passons au théorème de § I.

Supposons que $f_1(x), f_2(x)\ldots f_n(x)\ldots$ soient des fonctions non décroissantes dans un intervalle (A, B) et que l'on ait en dehors d'un ensemble E_i

$$f_i'(x) = 0$$

On suppose que la mesure de E_i est égale à zéro. Par conséquant la mesure de l'ensemble-somme

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_i \ldots$$

est aussi nulle; la mesure de l'ensemble $C_{AB}(E)$ complémentaire à E par rapport à (A, B) est donc égale à $B - A$.

Soit ε un nombre positif arbitrairement donné et Q un ensemble fermé de mesure dépassant $B - A - \varepsilon$ qui est sous-ensemble de $C_{AB}(E)$. En vertu du théorème 2 de § V (§ XVII) on a, quel que soit i:

(51) $$v_Q[f_i(x)] = 0.$$

On suppose que la série

(52) $$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

est convergente pour $A < x < B$.

En vertu du théorème 1 de § III (§ VI) il résulte de (51) qu'on a

(53) $$v_Q[f(x)] = 0.$$

Il en résulte, (§ IV, § XII) que l'on a presque partout dans Q

(54) $$f'(x) = 0.$$

L'ensemble des points où l'égalité (54) n'est pas remplie est évidemment mesurable. Sa mesure est, comme nous venons de voir, inférieure à ε quel que soit $\varepsilon > 0$. Donc cette mesure est nulle. C. q. f. d.

XIX. Dans l'intervalle (0, 1) on a

$$0 < Enx < n$$

donc la série (1) est convergente pour $0 < x < 1$. On a presque partout

(55) $$(Enx)' = 0$$

parce que le seuls points où l'égalité (55) n'est pas remplie sont des points d'abscisse rationnelle (à dénominateur égal à n),

Donc en vertu du théorème de § I (§ XVIII) la somme de la série (1) est une fonction à dérivée nulle presque partout.

XX. Soient E_1, $E_2 \ldots E_n \ldots$ des ensembles parfaits de mesure nulle, tels que l'ensemble-somme

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$$

soit partout dense dans l'intervalle (0, 1).

(Pour fixer les idées nous pouvons supposer par ex. que E_n est l'ensemble des nombres réels x tels que dans le développement de $10^n x$ en fraction décimale tous les chiffres occupant après la virgule la place d'ordre pair sont des zéros). A l'ensemble E_n on peut faire correspondre une fonction continue non décroissante $\varphi_n(x)$ constante [1]) dans tous les intervalles contigus à E_n (Cf. de la Vallée

[1]) On suppose que la valeur de $\varphi_n(x)$ varie quand on passe d'un intervalle contigu à E_n à un autre.

Poussin, loc. cit. page 56, § 67). En multipliant $\varphi_n(x)$ par un facteur convenable on peut fixer sa valeur de telle sorte qu'on ait pour $0 < x < 1$

$$|\varphi_n(x)| < \frac{1}{n^2}. \tag{56}$$

Nous affirmons que la fonction

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots \tag{57}$$

est une fonction continue, croissante (au sens strict) à dérivée nulle presque partout.

En effet: on a en déhors de E_i, c'est-à-dire presque partout:

$$\varphi_i'(x) = 0;$$

en vertu de l'inégalité (56) la série (57) est convergente, donc le théorème de § I (§ XVIII) s'applique et on a presque partout

$$\varphi'(x) = 0.$$

La convergence de la série (57) est uniforme, — donc $\varphi(x)$ est une fonction partout continue.

L'ensemble-somme $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ étant partout dense, il est possible de faire correspondre à chaque intervalle (a, b) un ensemble E_n contenant des points de cet intervalle. Par suite [1]) on a $\varphi_n(b) > \varphi_n(a)$ (l'égalité exclue); puisque pour tout i on a $\varphi_i(b) \geqq \varphi_i(a)$, il en résulte, que $\varphi(b) > \varphi(a)$, c'est-à-dire $\varphi(x)$ est une fonction croissante (au sens strict) c. q. f. d.

[1]) Voir la note [1]) de la page 62.