Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues.

Par

Wacław Sierpiński (Varsovie).

Soit

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots \tag{1}$$

une suite infinie des fonctions d'une variable réelle, E — l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels la suite (1) est convergente. On démontre sans peine que l'ensemble E est toujours un $F_{\sigma\delta}$, c'est-à-dire un produit dénombrable des sommes dénombrables d'ensembles fermés. Cela résulte p. e. immédiatement de la formule

$$E = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} E\left(|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{m}\right)$$

dont la démonstration n'offre pas de difficulté [1]). Or le problème se pose: E étant un ensemble $F_{\sigma\delta}$ linéaire donné, existe-il toujours une suite infinie des fonctions continues (1) qui converge sur E et diverge sur le complémentaire de E? [2]). La démonstration que la reponse est affirmative fait objet de la présente note. Nous obtenons ainsi ce

Théorème: Pour qu'un ensemble linéaire E puisse être regardé comme ensemble des points de conver-

[1]) Cf. F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914, p. 397.

[2]) M. Hausdorff écrit l. c. (p. 398): „Die Menge der Konvergenzstellen braucht also keine Menge F_σ oder G_δ zu sein (natürlich erst recht keine abgeschlossene Menge F und kein Gebiet G), und die Tatsache dass sie stets ein $F_{\sigma\delta}$ ist dürfte sich kaum vereinfachen lassen".

gence d'une suite de fonctions continues il faut et il suffit qu'il soit un $F_{\sigma\delta}$.

Il en résulte naturellement tout de suite que pour qu'un ensemble linéaire E puisse être regardé comme ensemble des points de divergence d'une suite de fonctions continues, il faut et il suffit qu'il soit un $G_{\delta\sigma}$ (une somme dénombrable des produits dénombrables d'ensembles ouverts).

Lemme I. Tout ensemble F_σ linéaire est une somme d'un ensemble F_σ punctiforme P et d'un nombre fini ($\geqslant 0$) ou dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres, dont les extrémités appartiennent à P.

Démonstration. Soit E un ensemble F_σ linéaire donné (il suffira évidemment de démontrer notre lemme pour les ensembles bornés). Or, soit G l'ensemble de tous les points intérieurs de E (s'il y en a): ce sera, comme on sait, un ensemble ouvert, donc une somme d'un nombre fini ou dénombrable d'intérieurs d'intervalles

$$d_1,\ d_2,\ d_3, \ldots$$

n'empiétant pas les uns sur les autres, et le complémentaire F de l'ensemble G sera fermé. L'ensemble EF sera donc un ensemble F_σ ne contenant aucun point intérieur, donc un F_σ punctiforme.

Soit maintenant c_n le centre de l'intervalle d_n et désignons par Q l'ensemble de tous les points

$$c_n \pm \frac{k d_n}{2k+1} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots;\ \ n=1, 2, 3, \ldots).$$

On voit sans peine que l'ensemble $P = EF + Q$ sera un ensemble F_σ punctiforme et que E sera une somme de l'ensemble P et des intervalles

$$\left(c_n \pm \frac{k d_n}{2k+1},\quad c_n \pm \frac{(k+1)\, d_n}{2k+3}\right) \qquad (k=0.\ 1, 2, \ldots;\ \ n=1, 2, \ldots)$$

n'empiétant pas les uns sur les autres, dont les extrémités appartiennent à Q, donc aussi à P. Le lemme est ainsi démontré.

Lemme II. Tout ensemble F_σ linéaire punctiforme est une somme d'une série au plus dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux.

Démonstration. Soit E un ensemble F_σ linéaire punctiforme donné. Nous avons donc

$$E = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

où F_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sont des ensembles fermés qu'on peut supposer bornés (puisque autrement il suffirait de les décomposer en parties bornées, pouvant d'ailleurs avoir des points communs). Les ensembles

$$S_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

seront donc punctiformes (comme sous-ensembles de E), fermés et bornés et $S_n \subset S_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$, et nous aurons

$$E = F_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \dots,$$

les termes de cette série étant sans points communs deux à deux.

Pour démontrer notre lemme il suffira évidemment de prouver que tout ensemble $S_{n+1} - S_n$ est une somme d'une série au plus dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux. Nous démontrerons que si A et $B \subset A$ sont deux ensembles linéaires fermés, punctiformes et bornés, l'ensemble $A - B$ est une somme d'une série au plus dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux.

Soient donc A et $B \subset A$ deux ensembles linéaires fermés, punctiformes et bornés, et soit p un point de B, k — un nombre naturel donné. L'ensemble A étant punctiforme, il existe à l'intérieur de l'intervalle $\left(p - \frac{1}{k}, p\right)$ un point a n'appartenant pas à A, et de même à l'intérieur de l'intervalle $\left(p, p + \frac{1}{k}\right)$ un point b n'appartenant pas à A. Il existe donc pour tout point p de B un intervalle (a, b) de longueur $< \frac{2}{k}$ entourant p dont les extrémités n'appartiennent pas à A. L'ensemble B étant fermé et borné, il existe donc d'après le théorème de M. Borel un nombre fini des intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ de longueurs $< \frac{2}{k}$ dont les extrémités n'appartiennent pas à A et tels que tout point de B est intérieur à un au moins d'entre eux. Posons, en particulier, $k = 1$ et soit T_1

la partie de A recouverte par les intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, et désignons $H_1 = A - T_1$. On voit sans peine que les ensembles T_1 et H_1 seront fermés punctiformes et bornés et que $T_1 \supset B$, donc

$$A - B = H_1 + (T_1 - B).$$

Sur l'ensemble $T_1 - B$ nous pouvons raisonner comme plus haut sur $A - B$, en posant $k = 2$, ce qui nous donnera la formule

$$T_1 - B = H_2 + (T_2 - B),$$

où H_2 et T_2 seront des ensembles fermés, punctiformes et bornés et $T_2 \supset B$. En répétant ce raisonnement et en posant succesivement $k = 3, 4, \dots$, nous obtiendrons une suite infinie

$$H_1, H_2, H_3, \dots$$

d'ensembles fermés sans points communs deux à deux, telle que pour tout nombre naturel k subsiste la formule

$$(2) \qquad A - B = H_1 + H_2 + \dots + H_k + (T_k - B),$$

où T_k est un ensemble fermé contenant B et dont tout point a une distance $< \frac{2}{k}$ de l'ensemble B.

Soit p un point n'appartenant pas à B: le point p aura donc une distance positive d de l'ensemble B et pour $k > \frac{2}{d}$ n'appartiendra pas à T_k On en déduit tout de suite de la formule (2) que

$$A - B = H_1 + H_2 + H_3 + \dots$$

Nous avons donc démontré que l'ensemble $A - B$ est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés (ou vides) sans points communs deux à deux.

Notre lemme est donc démontré.

Des lemmes I et II on déduit immédiatement le

Lemme III. Tout ensemble F_σ linéaire est une somme $P + Q$, où P est une somme d'une série au plus dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux et Q est une somme d'un nombre fini ($\geqslant 0$) ou dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres, dont les extrémités appartiennent à P.

Nous allons maintenant à démontrer le

Lemme IV. Pour tout ensemble F_σ linéaire E et pour tout nombre positif ϱ existe une suite infinie des fonctions continues $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ qui sont toutes en valeur absolue $\leqslant \varrho$, et qui convergent vers 0 pour les nombres x de E et divergent pour tous les autres x réels.

Démonstration. Soit E un ensemble F_σ linéaire donné, $E=P+Q$ — la décomposition de E dont il s'agit dans le lemme III. Nous avons donc

$$(3) \qquad P=F_1+F_2+F_3+\ldots$$

où F_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles fermés ou vides sans points communs deux à deux. Nous démontrerons d'abord l'existence d'une suite infinie des fonctions continues $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$, toutes en valeur absolue $\leqslant \varrho$, qui converge vers 0 pour les nombres x de P et diverge pour les autres x réels Dans le cas où la série (3) serait finie, l'ensemble P serait fermé et la démonstration de l'existence d'une telle suite $\varphi_n(x)$ ne présenterait pas de difficulté (Il suffirait de poser p. e. pour tout n naturel $\varphi_{2n-1}(x)=0$ et $\varphi_{2n}(x)=\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est une fonction continue nulle pour les nombres x de l'ensemble fermé P et positive $\leqslant \varrho$ pour les autres x réels). Nous pouvons donc supposer que les termes de la série (3) sont tous non vides.

Posons pour tout x réel

$$(4) \qquad \varphi_{2n-1}(x)=0, \qquad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Soit maintenant n un nombre naturel donné: nous définirons la fonction continue $\varphi_{2n}(x)$ comme il suit. Posons

$$S_n=F_1+F_2+\ldots+F_n$$

— ce sera un ensemble fermé sans points communs avec F_{n+1}, donc ayant une distance positive δ_n de l'ensemble F_{n+1}. Désignons par T_n l'ensemble de tous les points x qui ont une distance $\geqslant \dfrac{\delta_n}{3+n\delta_n}$ de l'ensemble S_n: ce sera, comme on voit sans peine, un ensemble fermé, sans points communs avec S_n. Posons $\varphi_{2n}(x)=0$ sur S_n et $\varphi_{2n}(x)=\varrho$ sur T_n: la fonction $\varphi_{2n}(x)$ sera ainsi définie pour tous les x réels sauf pour les points x intérieurs aux intervalles contigus à l'ensemble fermé S_n+T_n; complétons sa définition par la condition d'être linéaire dans les intervalles contigus à $S_n + T_n$: on voit sans peine que la fonction $\varphi_{2n}(x)$ ainsi définie sera continue pour tout x réel et qu'elle sera en valeur absolue $\leqslant \varrho$.

Je dis que la suite infinie $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ converge vers 0 pour les nombres x de P. D'après (4) il suffira de démontrer cela pour la suite $\varphi_{2n}(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Soit donc x_0 un point de P. D'après (3), x_0 sera, pour un indice k, un point de F_k, donc x_0 appartiendra à S_n pour $n \geqslant k$ et nous aurons, d'après la définition de la fonction φ_{2n}, $\varphi_{2n}(x_0) = 0$ pour $n \geqslant k$, donc $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_{2n}(x_0) = 0$, c. q. f. d.

Or, je dis que la suite $\varphi_n(x)$ diverge pour tout x n appartenant pas à P. En effet, soit x_0 un tel nombre, m — un nombre naturel donné, et supposons que nous avons $\varphi_{2n}(x_0) \neq \varrho$ pour $n \geqslant m$. De l'inégalité $\varphi_{2m}(x_0) \neq \varrho$ et de la définition de la fonction $\varphi_{2m}(x)$ il s'en suit que le point x_0 a une distance $d < \dfrac{\delta_m}{3 + m\delta_m} < \dfrac{\delta_m}{3}$ de l'ensemble S_m. Or, δ_m désignant la distance entre S_m et F_{m+1}, nous en concluons que x_0 a une distance $> \delta_m - \dfrac{\delta_m}{3} = \dfrac{2\delta_m}{3} > \dfrac{\delta_m}{3+m\delta_m} > d$ de l'ensemble F_{m+1}. Nous en concluons, d'après $S_{m+1} = S_m + F_{m+1}$, que la distance de x_0 à S_{m+1} est égale à celle de x_0 à S_m, c'est-à-dire $= d$. En remplaçant m par $m+1$ et en répétant le même raisonnement, nous concluons que la distance de x_0 à l'ensemble S_{m+2} est égale à d et, en général, que la distance de x_0 à l'ensemble S_{m+k} est $= d$, pour $k = 1, 2, 3\ldots$. Or, d'après $\varphi_{2m+2k}(x_0) \neq \varrho$ nous concluons que x_0 a une distance $< \dfrac{\delta_{m+k}}{3 + (m+k)\,\delta_{m+k}} < \dfrac{1}{m+k}$ de l'ensemble S_{m+k}. Nous en tirons que $d < \dfrac{1}{m+k}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, d'où il résulte que $d = 0$, c'est à-dire, S_m étant fermé, que x_0 est un point de S_m. Or, c'est impossible, puisque x_0 n'appartient pas à P. Nous avons donc démontré que pour tout point x_0 n'appartenant pas à P et pour tout nombre naturel m il existe un indice $n > m$ tel que $\varphi_{2n}(x_0) = \varrho$. Il en résulte que la suite $\varphi_{2n}(x_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ne peut avoir 0 pour limite. D'après (4) nous en concluons que la suite $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ diverge pour tout x n'appartenant pas à P.

Définissons maintenant les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ comme il suit. Pour tout point x qui n'est pas intérieur à l'ensemble Q

posons $f_n(x) = \varphi_n(x)$; la fonction $f_n(x)$ sera ainsi définie sur un ensemble fermé H et elle sera continue sur cet ensemble (puisque $\varphi_n(x)$ est une fonction continue). Complétons la définition de la fonction $f_n(x)$ pour les intervalles contigus à H (c'est-à-dire pour les intervalles constituant Q) par la condition qu'elle soit linéaire dans ces intervalles. On voit sans peine que la fonction $f_n(x)$ ainsi définie sera continue pour tout x réel et qu'elle sera $\leqslant \varrho$ en valeur absolue.

Je dis que la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ converge vers 0 pour tout point x de E et diverge pour tous les autres x réels.

En effet, soit x_0 un point de E. Si x_0 n'est pas intérieur à Q, nous avons, d'après la définition de f_n, $f_n(x_0) = \varphi_n(x_0)$. D'autre part, Q étant une somme d'intervalles dont les extrémités appartiennent à P, nous concluons d'après $E = P + Q$ que x_0 appartient à P; or, dans ce cas nous avons $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x_0) = 0$. Nous avons donc $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x_0) = 0$ pour les nombres x_0 de E non intérieurs à Q. Or, si x_0 est intérieur à Q, il existe un intervalle (a, b) de Q dont les extrémités a et b appartiennent à P et ne sont pas intérieures à Q (puisque les intervalles de Q n'empiètent pas les uns sur les autres). Nous avons donc (d'après la définition de f_n): $f_n(a) = \varphi_n(a)$ et $f_n(b) = \varphi_n(b)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc $\lim\limits_{n=\infty} f_n(a) = 0$ et $\lim\limits_{n=\infty} f_n(b) = 0$ (puisque la suite $\varphi_n(x)$ converge vers 0 pour les nombres x de P). Or, les fonctons $f_n(x)$ étant linéaires dans l'intervalle (a, b) (comme intervalle appartenant à Q), nous en concluons tout de suite que $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = 0$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Nous avons donc démontré que $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = 0$ pour tous les nombres x de E.

Or soit x_0 un nombre n'appartenant pas à $E = P + Q$: le nombre x_0 n'appartiendra donc ni à Q ni à P. Il en résulte que $f_n(x_0) = \varphi_n(x_0)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ (puisque x_0 n'appartient pas à Q) et que la suite $\varphi_n(x_0)$ diverge (puisque x_0 n'appartient pas à P). Donc la suite $f_n(x_0)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est divergente.

Notre lemme IV est donc démontré.

Soit maintenant E un ensemble $F_{\sigma\delta}$ linéaire donné. Nous pouvons donc poser

$$E = E_1 E_2 E_3 \ldots,$$

où E_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles F_σ.

Soit k un nombre naturel donné. D'après le lemme IV il existe pour l'ensemble E_k et pour le nombre positif $\frac{1}{k}$ une suite infinie des fonctions continues $f_{k,n}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ telles que

$$(5) \qquad f_{k,n}(x) \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \quad -\infty < x < +\infty.$$

et qui converge vers 0 pour x appartenant à E_k et diverge pour x n'appartenant pas à E_k.

Rangeons maintenant la suite double $f_{k,n}(x)$ en une suite simple par la méthode des diagonaux: nous obtiendrons ainsi une suite infinie des fonctions continues

$$(6) \qquad \begin{gathered} F_1(x) = f_{1,1}(x), \qquad F_2(x) = f_{1,2}(x), \qquad F_3(x) = f_{2,1}(x), \\ F_4(x) = f_{1,3}(x), \ldots \end{gathered}$$

Je dis que la suite $F_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ converge vers 0 pour tout nombre x de E et diverge pour tous les autres x réels.

En effet, soit x_0 un nombre de E, ε — un nombre positif donné. Déterminons un nombre naturel m tel que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Le nombre x_0 appartenant à E, x_0 appartient à chacun d'ensembles $E_1, E_2, \ldots E_m$. Donc, chacune des m suites

$$f_{1,n}(x_0), f_{2,n}(x_0), \ldots, f_{m,n}(x_0) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

converge vers 0. Il existe donc un nombre $\mu = \mu(\varepsilon)$ tel que

$$(7) \qquad |f_{k,n}(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > \mu; \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Or, nous avons, d'après (5) et d'après $\frac{1}{m} < \varepsilon$:

$$(8) \qquad |f_{k,n}(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad k > m.$$

Les inégalités (7) et (8) démontrent que, sauf peut être un nombre fini de termes, les termes de la suite (6) sont pour $x = x_0$ en valeur absolue $< \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout ε positif, nous concluons que $\lim_{n=\infty} F_n(x_0) = 0$.

Soit maintenant x_0 un nombre réel n'appartenant pas à E. Il existe donc un indice m tel que x_0 n'appartient pas à E_m. La suite infinie $f_{m,u}(x_0)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est donc divergente, ce qui entraîne évidemment la divergence de la suite (6) pour $x = x_0$.

Nous avons donc démontré le suivant

Théorème: Pour tout ensemble $F_{\sigma\delta}$ linéaire donné E il existe une suite infinie des fonctions continues d'une variable réelle x, $F_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, qui converge vers 0 pour les nombres x de E et diverge pour tous les autres x réels.