

Démonstration d'un théorème sur les fonctions de première classe.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Mazurkiewicz a démontré récemment un théorème remarquable sur les fonctions de première classe que voici ¹⁾:

Pour toute fonction bornée de première classe $f(x)$ et pour tout nombre ε positif donné il existe une fonction qui est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement et qui est égale à $f(x)$ à moins de ε près.

La démonstration de ce théorème donnée par M. Mazurkiewicz fait appel aux nombres transfinis. Le but de la présente Note est de démontrer le théorème de M. Mazurkiewicz sans l'intervention du transfini. Il suffira évidemment de démontrer (sans invoquer le transfini) les deux théorèmes suivants, dont il résulte tout de suite le théorème en question.

Théorème I: Pour toute fonction bornée $f(x)$ de première classe et pour tout nombre ε positif il existe une fonction de première classe qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes et qui est égale à $f(x)$ à moins de ε près.

Théorème II: Toute fonction de première classe qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement.

¹⁾ St. Mazurkiewicz: Sur les fonctions de classe 1, § 11 (ce volume, p. 32).

Le théorème I est démontré sans emploi du transfini par M. C. de la Vallée Poussin¹⁾. Il nous reste donc à démontrer le théorème II (qui est nouveau).

Lemme. Toute fonction de première classe qui ne prend que deux valeurs 0 et 1 est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement.

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction de première classe qui ne prend que les valeurs 0 et 1. D'après un théorème de M. Lebesgue les ensembles

$$(1) \quad \begin{aligned} P &= E(f(x) = 1) = E(f(x) > 0) \\ \text{et } Q &= E(f(x) = 0) = E(f(x) < 1) \end{aligned}$$

sont des sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés²⁾: nous pouvons donc poser

$$(2) \quad P = F_1 + F_2 + F_3 + \dots \quad \text{et} \quad Q = H_1 + H_2 + H_3 + \dots$$

F_n et H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) étant des ensembles fermés.

D'après (1) nous avons évidemment:

$$P + Q = E(-\infty < f(x) < +\infty);$$

l'ensemble $P + Q$ contient donc tout x réel.

Posons:

$$(3) \quad \begin{aligned} S_n &= F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad \text{et} \quad T_n = H_1 + H_2 + \dots + H_n \\ & \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

— ce seront évidemment des ensembles fermés.

Comprenons par S_0 , T_0 et T_{-1} des ensembles vides et posons (pour $n = 1, 2, 3, \dots$):

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi(x) = 2 - n & \text{sur } (S_n - S_{n-1}) + (T_{n-1} - T_{n-2}), \\ \psi(x) = 1 - n & \text{sur } (S_n - S_{n-1}) + (T_n - T_{n-1}). \end{cases}$$

¹⁾ *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire* (Paris 1916), p. 118.

²⁾ Ce théorème résulte tout de suite de la formule

$$E(f(x) > a) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{n=p}^{\infty} E\left(f_n(x) \geq a + \frac{1}{k}\right)$$

dans laquelle $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) est une suite de fonctions continues convergente vers $f(x)$

On voit sans peine que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ seront ainsi définies pour tous les nombres x réels. Or je dis que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont semi-continues supérieurement et que nous avons pour tout x réel:

$$(5) \quad f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

Pour démontrer que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont semi-continues supérieurement, il suffira de prouver que pour tout a réel donné les ensembles $E(\varphi(x) \geq a)$ et $E(\psi(x) \geq a)$ sont fermés. Soit donc a un nombre réel donné. Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne prenant, d'après (4), que des valeurs entières, nous avons évidemment

$$(6) \quad \begin{aligned} E(\varphi(x) \geq a) &= E(\varphi(x) \geq m) \\ \text{et } E(\psi(x) \geq a) &= E(\psi(x) \geq m), \end{aligned}$$

m désignant l'entier le plus petit $\geq a$. Or, d'après (4) nous trouvons aisément:

$$\begin{aligned} E(\varphi(x) \geq m) &= 0 \quad \text{pour } m > 1, & E(\varphi(x) \geq 1) &= S_1, \\ E(\psi(x) \geq m) &= 0 \quad \text{pour } m > 0, \\ \left. \begin{aligned} E(\varphi(x) \geq m) &= S_{2-m} + T_{1-m} \\ E(\psi(x) \geq m) &= S_{1-m} + T_{1-m} \end{aligned} \right\} & \text{pour } m = 0, -1, -2, \dots, \end{aligned}$$

d'où il résulte immédiatement que les ensembles (6) sont tous fermés (puisque les ensembles (3) sont fermés). Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont donc semi-continues supérieurement.

Or soit x un nombre réel donné, donc un nombre de l'ensemble $P + Q$. Distinguons deux cas:

1) x appartient à P . D'après (2) et (3) nous concluons qu'il existe un nombre naturel k tel que x appartient à l'ensemble $S_k - S_{k-1}$. Donc, d'après (4), nous avons

$$\varphi(x) = 2 - k, \quad \psi(x) = 1 - k,$$

ce qui donne: $\varphi(x) - \psi(x) = 1$.

2) x appartient à Q . D'après (2) et (3) il existe alors un nombre naturel k tel que x appartient à l'ensemble $T_k - T_{k-1}$ et nous trouvons, d'après (4):

$$\varphi(x) = 1 - k, \quad \psi(x) = 1 - k,$$

ce qui donne: $\varphi(x) - \psi(x) = 0$.

Nous avons donc $\varphi(x) - \psi(x) = 1$ pour les nombres x de P et $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ pour les nombres x de Q : d'après (1) nous en concluons tout de suite que pour tout x réel subsiste la formule (5).

Notre lemme est donc démontré.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction de première classe qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes a_1, a_2, \dots, a_n . Posons, pour $k = 1, 2, \dots, n$:

$$f_k(x) = 1 \quad \text{si} \quad f(x) = a_k \quad \text{et} \quad f_k(x) = 0 \quad \text{si} \quad f(x) \neq a_k:$$

nous aurons évidemment pour tout x réel

$$(7) \quad f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x).$$

Or, on voit sans peine que les fonctions $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sont de première classe: nous pouvons donc poser, d'après notre lemme:

$$f_k(x) = \varphi_k(x) - \psi_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

où $\varphi_k(x)$ et $\psi_k(x)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement.

Les fonctions $a_k \varphi_k(x)$ et $-a_k \psi_k(x)$ seront donc semi-continues (supérieurement ou inférieurement, suivant que $a_k \geq 0$ ou $a_k < 0$) et par suite les fonctions $a_k f_k(x)$ seront sommes de deux fonctions semi-continues. D'après (7), $f(x)$ sera donc une somme d'un nombre fini de fonctions semi-continues, donc, comme on voit sans peine — une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement.

Le théorème II est ainsi démontré.
