# Sur les fonctions de classe 1.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Sierpiński a posé et résolu par la négative le problème suivant: peut on représenter toute fonction de classe 1 par une différence des deux fonctions semi-continues supérieurement [1]). Dans la première partie de cette Note j'obtiens le même résultat par un procédé un peu différent, — dans la seconde je démontre un théorème général qui rentre dans le même ordre d'idées.

## I.

1. J'appelle ensemble $R$ d'ordre $n$ [2]) tout ensemble $A$, fermé, dénombrable et tel que

(1) $$A^{(n)} \neq 0, \qquad A^{(n+1)} = 0.$$

On aura besoin dans la suite de trois propriétés de ces ensembles.

2. $I$ étant un intervalle, $B$ — un ensemble fermé et dénombrable, — il existe un ensemble $R$ d'ordre $n$ contenu dans $I - B$.

3. On a (d'après le théorème de Cantor-Bendixon), pour tout ensemble $R$ d'ordre $n$:

(2) $$A = \sum_{i=0}^{n} (A^{(i)} - A^{(i+1)})$$

$A^{(0)}$ — désignant l'ensemble $A$.

4. $A$ étant un ensemble $R$ d'ordre $n$, on a:

(3) $$(A^{(i)} - A^{(i+1)})' = A^{(i+1)} \qquad i = 0, 1 \,.\,. n$$

[1]) V. l'article précédent.

[2]) V. p. e. Schoenfliess-Hahn: Entwickelung der Mengenlehre p. 328.

5. Nous démontrerons maintenant le lemme suivant:

**Lemme 1.** Prémisses: $A$ est un ensemble $R$ d'ordre $n$; $a \subset A^{(k)} - A^{(k+1)}$ $(k \leqq n)$; $g_1(x)$, $g_2(x)$ sont deux fonctions semi-continues supérieurement pour $x \subset A$.

Thèse: Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une suite de points $\{x_i\}$, $i = 0, 1 \dots k$, assujétie aux conditions:

(4) $$x_k = a$$

(5) $$x_i \subset A^{(i)} - A^{(i+1)} \qquad i = 0 \dots k$$

et, si $k > 0$:

(6) $$g_s(x_i) \leqq g_s(x_{i+1}) + \varepsilon \qquad s = 1, 2; \quad i = 0 \dots k - 1.$$

Notre lemme est certainement exact pour $k = 0$; il suffit alors de considérer la suite composée d'un seul point $x_0 = a$. Nous allons démontrer, que le lemme étant supposé exact pour $k - 1$ $(k > 0)$, — il est exact pour $k$. $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont semicontinues supérieurement, il existe par suite un $\delta > 0$, tel que:

(7) $$x - a \leqq \delta, \qquad x \subset A$$

entraîne:

(8) $$g_s(x) \leqq g_s(a) + \varepsilon \qquad s = 1, 2.$$

D'après **4** $a$ est point limite de $A^{(k-1)} - A^{(k)}$, il existe donc un point $b \subset A^{(k-1)} - A^{(k)}$, tel que:

(9) $$b - a| \leqq \delta$$

donc:

(10) $$g_s(b) \leqq g_s(a) + \varepsilon \qquad s = 1, 2.$$

En vertu de notre supposition, il existe une suite $\{x^{(i)}\}$, $i = 0, \dots k - 1$, assujétie aux conditions:

(11) $$x^{(k-1)} = b$$

(12) $$x^{(i)} \subset A^{(i)} - A^{(i+1)} \qquad i = 0, \dots k - 1$$

et, si $k - 1 > 0$:

(13) $$g_s(x^{(i)}) \leqq g_s(x^{(i+1)}) + \varepsilon \qquad i = 0 \dots k - 2, \; s = 1, 2,$$

Si nous posons $x_i = x^{(i)}$ pour $i = 0, \dots k - 1$, et $x_k = a$, — la suite $\{x_i\}$, satisfaira aux conditions (4)—(6), en vertu de (10)—(13). Notre lemme est ainsi demontré par induction.

**6.** $A$ étant un ensemble $R$ d'ordre $2n$, — $\alpha$ un nombre positif, posons:

$$(14)\qquad f(x, \alpha, A) = \frac{\alpha\,[1-(-1)^k]}{2} \qquad \text{pour } x \subset A^{(k)} - A^{(k-1)}; \quad k = 0, 1 \dots 2n$$

— la fonction $f(x, \alpha, A)$ est définie (d'après **3**) pour $x \subset A$.

**7.** Posons:

$$(15)\qquad \begin{aligned} f_1(x) &= \alpha k \\ f_2(x) &= \alpha\left[k - \frac{1-(-1)^k}{2}\right] \end{aligned} \qquad \text{pour } x \subset A^{(k)} - A^{(k+1)}; \quad k = 0, 1 \dots 2n$$

— ces fonctions sont semicontinues supérieurement dans $A$ et on a:

$$(16)\qquad f(x, \alpha, A) = f_1(x) - f_2(x).$$

**8. Lemme 2.** Prémisses: On a:

$$(17)\qquad f(x, \alpha, A) = g_1(x) - g_2(x)$$

et les fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$ sont semicontinues snpérieurement dans $A$; $A$ est d'ordre $2n$.

Thèse: on a: [1])

$$(18)\qquad \omega\,[g_1, A] \geqq n\alpha.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe. d'après **5** une suite $\{x_i\}$, $i = 0, 1 \dots 2n$ telle que

$$(19)\qquad x_i \subset A^{(i)} - A^{(i+1)}$$

$$(20)\qquad g_s(x_i) \leqq g_s(x_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2n} \qquad s = 1, 2.$$

(14), (17), (19) entraînent:

$$(21)\qquad g_2(x_i) = g_1(x_i) - \frac{\alpha\,[1-(-1)^i]}{2}.$$

Donc, en vertu de (20):

$$(22)\qquad g_1(x_i) \leqq g_1(x_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2n} - \frac{\alpha\,[1-(-1)^{i+1}]}{2} \qquad i = 0, \dots 2n-1.$$

[1]) Je désigne par $\omega\,[f, A, x]$ l'oscillation de la fonction $f(x)$ au point $x$ par rapport à l'ensemble $A$ (d'après Baire: Leçons sur les fonctions discontinues p. 84), — par $\omega\,[f, A]$ — l'oscillation totale de $f(x)$ dans $A$ c. à. d. la borne supérieure des nombres $|f(x) - f(x')|$ pour $x \subset A$, $x' \subset A$.

En sommant ces inégalités, on aura:

(23) $$g_1(x_0) \leqq g_1(x_{2n}) - n\alpha + \varepsilon,$$

(24) $$g_1(x_{2n}) - g_1(x_0) \geqq n\alpha - \varepsilon,$$

(25) $$|g_1(x_{2n}) - g_1(x_0)| \geqq n\alpha - \varepsilon,$$

(26) $$\omega[g_1, A] \geqq n\alpha - \varepsilon$$

$\varepsilon$ étant arbitraire, (18) est démontré

**9.** Soit $\{r_n\}$ une suite contenant tous les nombres rationnels de l'intervalle $<0,1>$ $I_n$ — la partie commune des intervalles: $<0,1>$ et $<r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n}>$; c'est un intervalle.

Soient: $A_1$ un ensemble $R$, d'ordre 2, contenu dans $I_1$; $A_{n+1}$ un ensemble $R$ d'ordre $2n+2$, contenu dans $I_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k$; l'existence de $A_n$ pour tout $n$ résulte de **2**. Posons:

(27) $$\begin{aligned} F(x) &= f\left(x, \frac{1}{n}, A_n\right) && \text{pour } x \subset A_n \\ F(x) &= 0 && \text{pour } x \subset \left[<0,1> - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right]. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine, que la fonction $F(x)$ est continue pour $x \subset \left[<0,1> - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\right]$. Ses points de discontinuité sont par suite contenus dans l'ensemble dénombrable $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, — forment donc un ensemble dénombrable. Il s'ensuit que $F(x)$ est dans $<0,1>$ de classe 1. Supposons d'autre part, que l'on a:

(28) $$F(x) = G_1(x) - G_2(x)$$

$G_1(x)$ et $G_2(x)$ étant semicontinues supérieurement dans $<0,1>$. Soit $I = <\alpha, \beta>$ un intervalle contenu dans $<0,1>$. Soit $p$ un entier supérieur à $\frac{3}{\beta - \alpha}$. La suite $\{r_n\}$ est dense par rapport à $<0,1>$, donc il existe un entier $q \geqq p$, tel que:

(29) $$\frac{2\alpha + \beta}{3} < r_q < \frac{\alpha + 2\beta}{3}$$

L'intervalle $< r_q - \frac{1}{q},\ r_q + \frac{1}{q} >$ est contenu dans $I$, donc dans $< 0,1 >$. On a par suite:

$$(30) \qquad < r_q - \frac{1}{q},\ r_q + \frac{1}{q} > = I_q,$$

$$(31) \qquad A_q \subset I_q \subset I,$$

$$(32) \qquad \omega[G_1, I] \geqq \omega[G_1, A_q].$$

Mais pour $x \subset A_q$ on a d'après (27):

$$(33) \qquad G_1(x) - G_2(x) = f\left(x, \frac{1}{q}, A_q\right)$$

$G_1(x)$ et $G_2(x)$ étant semicontinues supérieurement dans $<0,1>$, — le sont encore dans $A_q$, donc en vertu de (32) et de 8, on aura

$$(34) \qquad \omega[G_1, I] \geqq q \cdot \frac{1}{q} = 1.$$

L'oscillation de $G_1(x)$ étant $\geqq 1$ dans tout intervalle contenu dans $< 0,1 >$, — il s'ensuit, que $G_1(x)$ est totalement discontinue dans $< 0,1 >$. D'autre part $G_1(x)$ est semi-continue supérieurement donc ponctuellement discontinue dans $< 0,1 >$. La relation (28) mène ainsi à une contradiction, elle est par suite impossible.

**10.** Nous avons donc démontré qu'il existe dans $< 0,1 >$ une fonction de classe 1 qui ne peut pas être mise dans la forme d'une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement dans $<0,1>$.

## II.

**11. Théorème.** Prémisse: $f(x)$ est une fonction bornée de classe 1 dans un intervalle $I$.

Thèse: Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions $G_1(x)$, $G_2(x)$ semicontinues supérieurement dans $I$ et telles que:

$$(35) \qquad |f(x) - [G_1(x) - G_2(x)]| \leqq \varepsilon \qquad x \subset I.$$

Déterminons une suite d'ensemble $\{P_\lambda\}$, $\lambda < \Omega$ par les convention suivantes:

I $P_1 = I$,

II Si $P_\lambda = 0$, alors $P_{\lambda+1} = 0$; si $P_\lambda \neq 0$, alors $P_{\lambda+1}$ est l'ensemble de tous les points $x$ pour lesquels:

(36) $$\omega[f, P_\lambda, x] \geqq \varepsilon$$

III Si $\lambda$ est de seconde espèce, alors:

(37) $$P_\lambda = \prod_{\alpha<\lambda}\{P_\alpha\}.$$

On a pour $\lambda < \mu$:

(38) $$P_\lambda \supset P_\mu$$

— de plus les $P_\lambda$ sont fermés [1]). Il existe par suite [2]) un nombre $\beta < \Omega$, tel que:

(39) $$P_\beta = P_{\beta+1};$$

on doit avoir $P_\beta = 0$, car, dans le cas contraire l'oscillation de $f(x)$ par rapport à $P_\beta$ serait $\geqq \varepsilon$ dans tout point de cet ensemble; $f(x)$ serait donc totalement discontinue dans $P_\beta$ ce qui est en contradiction avec la supposition que $f(x)$ est de classe 1. On peut supposer, que $\beta$ est le premier nombre pour lequel $P_\lambda = 0$. D'après III, $\beta$ doit être de première espèce: $\beta = \mu + 1$. On a:

(40) $$P_\mu \neq 0.$$

Appellons $\mu$ — l'indice de $f(x)$ dans $I$. Si l'intervalle $K \subset I$ ne contient aucun point de $P_\mu$, — l'indice de $f(x)$ dans $K$ est évidemment $< \mu$.

Nous démontrerons notre théorème par induction. Il est certainement vrai pour $\mu = 1$; en effet il suffit alors de poser: $G_1(x) = M[f, I, x]$ [3]), $G_2(x) = 0$. Il faut démontrer maintenant, que si le théorème est vrai pour toute fonction d'indice $< \mu$, — il reste vrai pour toute fonction d'indice $\mu$.

On peut évidemment déterminer une suite d'intervalles $\{I_k\}$, $k = 1, 2 \ldots$ de manière que:

(41) $$I - P_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} I_k,$$

(42) $$I_p \times I_q$$

contient pour $p \neq q$ au plus un point (ce point étant alors l'extrémité commune de $I_p$ et de $I_q$).

[1]) Baire l. c. p. 74.

[2]) l. c. p. 92.

[3]) l. c p. 84.

L'indice de $f(x)$ dans $I_k$ étant $<\mu$, il existe, par supposition, deux fonctions $g_1^{(k)}(x)$ et $g_2^{(k)}(x)$, semi-continues supérieurement dans $I_k$ et telles, que:

$$(43) \qquad |f(x)-[g_1^{(k)}(x)-g_2^{(k)}(x)]| \leqq \varepsilon \qquad x \subset I_k.$$

Désignons par $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$ respectivement les maxima de $g_1^{(k)}(x)$ et $g_2^{(k)}(x)$ dans $I_k$, — par $m$ la borne inférieure de $f(x)$ dans $P_\mu$. Déterminons la constante $c_k$ par les conditions:

$$(44) \qquad c_k \geqq M_1^{(k)}-m,$$

$$(44) \qquad c_k \geqq M_2^{(k)}$$

et posons:

I Pour $x \subset P_\mu$:

$$(46) \qquad G_1(x)=M[f,P_\mu,x]; \qquad G_2(x)=0.$$

II Pour $x$ intérieur à l'intervalle $I_k$:

$$(47) \qquad G_1(x)=g_1^{(k)}(x)-c_k; \qquad G_2(x)=g_2^{(k)}(x)-c_k.$$

III Pour $x$ — extrémité d'un intervalle $I_k$:
$G_1(x)$ — est égal au plus grand des deux nombres:

$$g_1^{(k)}(x)-c_k \quad \text{et} \quad g_1^{(l)}(x)-c_l$$

$G_2(x)$ — est égal au plus grand des deux nombres:

$$g_2^{(k)}(x)-c_k \quad \text{et} \quad g_2^{(l)}(x)-c_l$$

— $I_l$ désignant l'autre intervalle ayant $x$ pour extrémité.

Je dis, que $G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont semicontinues supérieurement dans $I$. Considérons un point $x_0 \subset I$. Trois cas sont possibles:

I $x_0 \subset P_\mu$. $G_1(x)$ et $G_2(x)$ étant semicontinues supérieurement dans $P_\mu$ — on peut, quel que soit $\delta>0$ déterminer un $\delta'>0$ tel que l'inégalité:

$$(48) \qquad |x-x_0| \leqq \delta' \qquad x \subset P_\mu$$

entraîne:

$$(49) \qquad G_s(x) \leqq G_s(x_0)+\delta \qquad s=1,2.$$

Je dis que (48) entraîne (49) non seulement pour $x \subset P_\mu$, mais encore pour $x \subset I-P_\mu$.

En effet il existe dans ce cas un entier $k$, tel que:

(50) $$G_1(x) = g_1^{(k)}(x) - c_k \leqq M_1^{(k)} - (M_1^{(k)} - m) = \\ = m \leqq f(x_0) \leqq M[f, P_\mu, x] = G_1(x_0)$$

et un entier $l$ (qui ne peut différer de $k$, que si $x$ est l'extrémité commune de $I_k$ et $I_l$) tel que:

(51) $$G_2(x) = g_2^{(l)}(x) - c_l \leqq M_2^{(k)} - M_2^{(k)} = 0 = G_2(x_0).$$

Donc si $x_0 \subset P_\mu$ — $G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont semicontinues supérieurement dans $x_0$. Il en est de même si II $x_0$ est intérieur à un intervalle $I_k$, car alors, dans un voisinage assez petit de $x_0$. $G_s(x)$ est identique à la fonction $g_s^{(k)}(x) - c_k$, semicontinue supérieurement pour $x = x_0$ $(s = 1, 2)$ et la semicontinuité supérieure dans un point est une proprieté locale. Reste à considérer le cas III — $x_0$ — extrémité commune de $I_k$ et $I_l$, $g_s^{(k)}(x)$ et $g_s^{(l)}(x)$ étant semicontinues supérieurement dans $I_k$ et $I_l$ respectivement, on peut déterminer pour tout $\delta > 0$ un $\delta' > 0$ tel, que l'intervalle $< x_0 - \delta', x_0 + \delta' >$ soit contenu à l'intérieur de l'intervalle $I_k + I_l$, et, que l'inégalité:

(52) $$|x - x_0| \leqq \delta'$$

entraîne:

(53) $$g_s^{(k)}(x) \leqq g_s^{(k)}(x_0) + \delta \quad \text{pour} \quad x \subset I_k$$
(54) $$g_s^{(l)}(x) \leqq g_s^{(l)}(x_0) + \delta \quad \text{pour} \quad x \subset I_l \qquad s = 1, 2.$$

Comme on a:

(55) $$G_s(x_0) \begin{matrix} \geqq g_s^{(k)}(x_0) - c_k \\ \geqq g_s^{(l)}(x_0) - c_l \end{matrix} \qquad s = 1, 2$$

(56) $$G_s(x) = g_s^{(k)}(x) - c_k \quad \text{pour } x \text{ intérieur à } I_k$$
(57) $$G_s(x) = g_s^{(l)}(x) - c_l \quad \text{pour } x \text{ intérieur à } I_l \qquad s = 1, 2$$

— on voit, que (52) entraîne:

(58) $$G_s(x) \leqq G_s(x_0) + \delta \qquad s = 1, 2$$

c. a. d. $G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont semicontinues supérieurement pour $x = x_0$ aussi dans ce cas.

Démontrons maintenant l'inégalité (35). Pour: I $x \subset P_\mu$, on a:

59) $$f(x) - [G_1(x) - G_2(x)]| = \\ = |f(x) - M[f, P_\mu, x]| \leqq \omega[f, P_\mu, x] < \varepsilon$$

car, à cause de $P_{\mu+1} = 0$ l'oscillation de $f(x)$ par rapport à $P_\mu$ est inférieure à $\varepsilon$ pour tout $x \subset P_\mu$. Pour: II $x$ intérieur à $I_k$ l'inégalite (35) devient (43), — elle est donc vérifiée. Enfin: III soit $x$ l'extremité commune de $I_k$ et de $I_l$, quatre cas peuvent se présenter

$$g_s^{(k)}(x) \geqq g_s^{(l)}(x) \tag{60}$$
$$g_s^{(k)}(x) \leqq g_s^{(l)}(x) \qquad s = 1, 2 \tag{61}$$
$$g_1^{(k)}(x) > g_1^{(l)}(x); \quad g_2^{(k)}(x) < g_2^{(l)}(x) \tag{62}$$
$$g_1^{(k)}(x) < g_1^{(l)}(x); \quad g_2^{(k)}(x) > g_2^{(l)}(x). \tag{63}$$

Dans le cas (60) — (35) se réduit à (43), dans le cas (61) à ce que devient (43) si l'on y remplace $k$ par $l$. Dans le cas (62) — on a:

$$\begin{aligned} g_1^{(k)}(x) - g_2^{(k)}(x) > g_1^{(k)}(x) - g_2^{(l)}(x) = \\ = G_1(x) - G_2(x) > g_1^{(l)}(x) - g_2^{(l)}(x). \end{aligned} \tag{64}$$

D'après (43) et ce que devient (43) si l'on y change $k$ en $l$, on a:

$$g_1^{(k)}(x) - g_2^{(k)}(x) \leqq f(x) + \varepsilon. \tag{65}$$
$$g_1^{(l)}(x) - g_1^{(l)}(x) \geqq f(x) - \varepsilon \tag{66}$$

(64), (65), (66) entraînent:

$$f(x) + \varepsilon > G_1(x) - G_2(x) > f(x) - \varepsilon \tag{67}$$

ce qui donne (35). Le cas (63) se traite de même.

Notre théorème est ainsi démontré.