Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous nous occuperons ici des problèmes suivants:

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ soit développable en une série absolument convergente de fonctions continues?

et:

Existe-il une fonction de première classe qui ne soit pas somme d'une série absolument convergente de fonctions continues?

Nous démontrerons que pour qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ soit développable en une série absolument convergente de fonctions continues, il faut et il suffit qu'elle soit une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement. En se basant sur ce théorème, nous prouverons ensuite qu'il existe des fonctions de la première classe qui ne sont pas développables en séries absolument convergentes de fonctions continues.

1. Soit

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots \tag{1}$$

une série de fonctions continues, absolument convergente pour tout x réel. Nous démontrerons que $F(x)$ est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement [1]).

[1]) Ce théorème m'a été communiqué par M. Stefan Glass.

Posons, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_n(x) = 0, & \psi_n(x) = -f_n(x), \quad \text{si} \quad f_n(x) \geqslant 0, \\ \varphi_n(x) = f_n(x), & \psi_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{si} \quad f_n(x) < 0; \end{cases}$$

nous aurons évidemment pour tout x réel:

$$(3) \qquad \varphi_n(x) \leqslant 0, \quad \psi_n(x) \leqslant 0,$$

$$(4) \qquad f_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x),$$

$$(5) \qquad |f_n(x)| = -\varphi_n(x) - \psi_n(x).$$

La série (1) étant, d'après l'hypothèse, absolument convergente (pour tout x réel), nous concluons, d'après (4) et (5) que les séries

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \psi_n(x)] \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [-\varphi_n(x) - \psi_n(x)]$$

sont convergentes (pour tout x réel), donc aussi les séries

$$(7) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

qu'on obtient en ajoutant ou en retranchant les séries (6). D'après (1), (4) et (7) nous avons:

$$(8) \qquad F(x) = \Phi(x) - \Psi(x).$$

Or il résulte sans peine de (2) que les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont continues: d'après (3) et (4) nous concluons donc que les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont sommes de séries convergentes de fonctions continues non positives, donc — limites de suites non croissantes de fonctions continues. Or, on démontre sans peine que des telles fonctions sont semi-continues supérieurement [1]).

Donc, d'après la formule (8), la fonction $F(x)$ est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement, c. q. f. d.

[1]) C'est un cas particulier d'un théorème plus général, d'après lequel une suite convergente non croissante de fonctions semi-continues supérieurement au point x a pour limite une fonction semi-continue supérieurement au point x. On trouve ce théorème p. e. chez W. H. Young: The fundamental theorems of the diff. calculus. Cambridge 1910, p. 7.

Pour aller plus loin, nous aurons besoin de suivant théorème de M. Baire[1]).

Toute fonction semi-continue supérieurement est limite d'une suite non croissante de fonctions continues.

2. Soit maintenant $F(x)$ une fonction d'une variable réelle qui est une différence de deux fonctions semi continues supérieurement:

$$F(x) = \Phi(x) - \Psi(x). \tag{9}$$

D'après le théorème énoncé dans l'article précédent, les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont limites de suites non croissantes de fonctions continues, soit

$$\Phi(x) = \lim_{n=\infty} \Phi_n(x), \qquad \Psi(x) = \lim_{n=\infty} \Psi_n(x). \tag{10}$$

Posons

$$\varphi_1(x) = \Phi_1(x), \qquad \psi_1(x) = \Psi_1(x),$$

$$\varphi_n(x) = \Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x), \qquad \psi_n(x) = \Psi_n(x) - \Psi_{n-1}(x)$$

$$\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ seront continues et pour $n = 2, 3, \ldots$ non positives, et nous aurons, d'après (10):

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \qquad \Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x). \tag{11}$$

Posons encore

$$f_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x), \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{12}$$

d'après (9), (11) et (12) nous aurons

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{13}$$

Or, nous avons, d'après (12)

$$|f_n(x)| \leqslant |\varphi_n(x)| + |\psi_n(x)| = -\varphi_n(x) - \psi_n(x),$$

$$\text{pour } n = 2, 3, 4, \ldots$$

[1]) R. Baire: Leçons sur les fonctions discontinues (Paris 1905). Aussi W. H. and G. C. Young: *Proceedings of the London Math. Soc.* Vol. 8 (1910), p. 332. Une démonstration très simple et élégante de ce théorème a donné récemment M. F. Hausdorff: *Mathematische Zeitschrift* Bd. 5 (1919), p. 293.

(puisque $\varphi_n(x) \leqslant 0$ et $\psi_n(x) \leqslant 0$ pour $n = 2, 3, \dots$), donc, d'après (11):

$$\sum_{n=1}^{m} |f_n(x)| \leqslant |f_1(x)| - \Phi(x) - \Psi(x) + \Phi_1(x) + \Psi_1(x),$$

pour $m = 1, 2, 3, \dots,$ ce qui démontre que la série (13) est absolument convergente.

Nous avons donc démontré qu'une fonction qui est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement se développe en une série absolument convergente de fonctions continues. Dans l'article 1 nous avons démontré le réciproque: nous pouvons donc énoncer ce

Théorème: Pour qu'une fonction d'une variable réelle soit développable en une série absolument convergente de fonctions continues, il faut et il suffit qu'elle soit une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement.

On pourrait démontrer que le même théorème subsiste pour les fonctions de plusieurs variables réelles.

Le problème d'existence de fonctions de la première classe qui ne sont pas développables en séries absolument convergentes de fonctions continues est donc équivalent avec le problème d'existence de fonctions de la première classe qui ne sont pas différences de deux fonctions semi-continues supérieurement. Nous démontrerons que des telles fonctions existent.

3. Lemme. Si

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \tag{14}$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement, nous avons pour tout x_0 réel:

$$\omega(\varphi, x_0) \geqslant f(x_0) - m(f, x_0), \tag{15}$$

$\omega(\varphi, x_0)$ désignant l'oscillation de $\varphi(x)$ au point x_0 et $m(f, x_0)$ — le minimum de $f(x)$ ou point x_0.

Démonstration. Soit x_0 un nombre réel donné, ε et η deux nombres positifs donnés. La fonction $\psi(x)$ étant semi-continue supérieurement, il existe un nombre positif $\delta < \eta$ tel que

$$\psi(x) < \psi(x_0) + \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x - x_0| < \delta. \tag{16}$$

Or, d'après la définition du minimum de $f(x)$ au point x_0, il existe un nombre ξ tel que

(17) $$|\xi - x_0| < \delta$$

et

(18) $$f(\xi) < m(f, x_0) + \varepsilon.$$

D'après (17), la formule (16) donne:

(19) $$\psi(\xi) < \psi(x_0) + \varepsilon.$$

Les formules (14), (18) et (19) donnent:

$$\varphi(\xi) = f(\xi) + \psi(\xi) < m(f, x_0) + \psi(x_0) + 2\varepsilon = \\ = m(f, x_0) + \varphi(x_0) - f(x_0) + 2\varepsilon,$$

donc

(20) $$\varphi(x_0) - \varphi(\xi) > f(x_0) - m(f, x_0) - 2\varepsilon.$$

Nous avons donc démontré (d'après (17) et $\delta < \eta$) que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ existe un nombre ξ tel que $|\xi - x_0| < \eta$ et pour lequel subsiste l'inégalité (20), ce qui prouve l'inégalité (15). Notre lemme est donc démontré.

4. Soit $P = \{a_\lambda\}$ $(0 < \lambda \leqslant \omega^\omega)$ un ensemble linéaire fermé, formé de nombres rationnels, qui, ordonné d'après la grandeur de ces nombres est bien ordonné (du type $\omega^\omega + 1$) et soit $a_{\omega^\omega} = 0$. On pourrait démontrer sans peine qu'un tel ensemble P existe et même on pourrait définir effectivement de tels ensembles.

Soit

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres rationnels différents: nous aurons donc $r_m \neq r_n$ pour $m \neq n$.

On voit sans peine que pour $m \neq n$, $\mu < \omega^\omega$, $\nu < \omega^\omega$ nous avons toujours

$$a_\mu + r_m\sqrt{2} \neq a_\nu + r_n\sqrt{2}.$$

On sait que le plus petit reste d'un nombre ordinal λ [1]) est toujours $= \omega^\gamma$, où γ est un nombre ordinal $\geqslant 0$; en particulier, le plus petit reste d'un nombre $\lambda < \omega^\omega$ est $= \omega^k$, où k est un entier $\geqslant 0$.

[1]) On appelle *reste* d'un nombre ordinal λ tout nombre ordinal ϱ (> 0) pour lequel existe un nombre ordinal π tel que $\lambda = \pi + \varrho$.

Soit λ un nombre ordinal donné quelconque $< \omega^\omega$, l — un nombre naturel donné quelconque, et soit ω^k (k entier $\geqslant 0$) le plus petit reste du nombre λ.

Posons

$$f(a_\lambda + r_l\sqrt{2}) = \frac{1}{l}, \quad \text{si} \quad k \text{ est pair},$$

et posons

$$f(x) = 0$$

pour tous les autres nombres réels x (donc pour tous les x réels qui ne sont pas de la forme $a_\lambda + r_l\sqrt{2}$, où λ est un nombre ordinal $< \omega^\omega$ dont le plus petit reste $= \omega^{2p}$ (p entier $\geqslant 0$), et où l est un nombre naturel).

D'après les remarques faites plus haut on voit sans peine que la fonction $f(x)$ sera ainsi bien déterminée pour tout x réel. On voit aussi sans peine que la fonction $f(x)$ ne peut être discontinue que pour les points

$$x = a_\lambda + r_l\sqrt{2} \quad (0 < \lambda \leqslant \omega^\omega, \quad l = 1, 2, 3, \ldots)\ ^{1)}$$

dont l'ensemble est évidemment dénombrable. C'est donc une fonction de la première classe.

Admettons que la fonction $f(x)$ est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement:

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x). \tag{21}$$

Soit l un nombre naturel donné. Nous démontrerons que nous avons pour tout nombre $\alpha < \omega^\omega$ et tout entier $p \geqslant 0$:

$$(22)\begin{cases} \omega(\varphi, a_{\alpha+\omega^{2p}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \dfrac{p+1}{l}, & \omega(\psi, a_{\alpha+\omega^{2p}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \dfrac{p}{l}, \\ \omega(\varphi, a_{\alpha+\omega^{2p+1}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \dfrac{p+1}{l}, & \omega(\psi, a_{\alpha+\omega^{2p+1}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \dfrac{p+1}{l}. \end{cases}$$

[1]) Puisque $f(x) = 0$ sur le complémentaire de l'ensemble $E = \{a_\lambda + r_l\sqrt{2}\}$ $(0 < \lambda \leqslant \omega^\omega,\ l = 1, 2, 3, \ldots)$, et $f(x) < \frac{1}{m}$ sur le complémentaire de l'ensemble $\{a_\lambda + r_l\sqrt{2}\}$ $(0 < \lambda \leqslant \omega^\omega,\ l = 1, 2, 3, \ldots m)$, sous-ensemble de E qui est fermé pour tout m naturel (comme somme d'un nombre fini d'ensembles superposables avec P).

D'après la définition de $f(x)$, nous avons

$$f(a_{\alpha+1}+r_1\sqrt{2})-m(f, a_{\alpha+1}+r_1\sqrt{2})=\frac{1}{l},$$

donc, d'après le lemme de l'article 3:

$$\omega(\varphi, a_{\alpha+1}+r_1\sqrt{2})\geqslant\frac{1}{l}, \tag{23}$$

ce qui démontre la première des formules (22) pour $p=0$. La seconde des formules (22) est pour $p=0$ vraie évidemment (puisque l'oscillation d'une fonction est toujours $\geqslant 0$)

D'après la définition de l'ensemble P nous avons (pour tout $\alpha<\omega^\omega$):

$$a_{\alpha+\omega}=\lim_{n=\infty} a_{\alpha+n},$$

donc:

$$a_{\alpha+\omega}+r_1\sqrt{2}=\lim_{n=\infty}(a_{\alpha+n}+r_1\sqrt{2}). \tag{24}$$

Or, d'après (23) nous avons évidemment aussi

$$\omega(\varphi, a_{\alpha+n}+r_1\sqrt{2})\geqslant\frac{1}{l}, \quad \text{pour } n=1, 2, 3,\ldots$$

(puisque on peut y remplacer α par $\alpha+(n-1)$): la formule (24) démontre donc que

$$\omega(\varphi, a_{\alpha+\omega}+r_1\sqrt{2})\geqslant\frac{1}{l}\ ^{1)}, \tag{25}$$

ce qui démontre la troisième des formules (22) pour $p=0$.

Soit α un nombre ordinal donné quelconque $<\omega^\omega$. Posons, pour abréger

$$x_0=a_{\alpha+\omega}+r_1\sqrt{2}: \tag{26}$$

d'après le définition de $f(x)$ nous aurons:

$$f(x_0)=0,$$

ce qui donne, d'après (21):

$$\psi(x_0)=\varphi(x_0). \tag{27}$$

[1]) Puisque l'ensemble $E(\omega(x)\geqslant A)$ est toujours fermé.

Soient δ et ε deux nombres positifs donnés quelconques. D'après (25) et (26) nous avons

$$(28)\qquad \omega(\varphi, x_0) = M(\varphi, x_0) - m(\varphi, x_0) \geqslant \frac{1}{l}.$$

La fonction $\varphi(x)$ étant semi-continue supérieurement, nous avons

$$(29)\qquad M(\varphi, x_0) = \varphi(x_0).$$

Or, d'après la définition du minimum d'une fonction en un point, il existe un nombre ξ tel que

$$(30)\qquad x_0 - \delta < \xi < x_0 + \delta$$

et

$$(31)\qquad \varphi(\xi) < m(\varphi, x_0) + \varepsilon.$$

Les formules (28), (29) et (31) donnent:

$$(32)\qquad \varphi(\xi) < \varphi(x_0) - \frac{1}{l} + \varepsilon.$$

La fonction $\varphi(x)$ étant semi-continue supérieurement au point ξ, il existe un nombre positif δ_1 tel que l'intervalle $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ est intérieur à l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (auquel, d'après (30), est intérieur ξ) et que

$$(33)\qquad \varphi(x) < \varphi(\xi) + \varepsilon \quad \text{pour} \quad \xi - \delta_1 < x < \xi + \delta_1 .$$

D'après (32) et (33) nous avons:

$$(34)\qquad \varphi(x) < \varphi(x_0) - \frac{1}{l} + 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad \xi - \delta_1 < x < \xi + \delta_1.$$

Or, la fonction $f(x)$ est nulle, sauf pour un ensemble dénombrable de points: il existe donc un nombre x intérieur à l'intervalle $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ tel que

$$f(x) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (31):

$$(35)\qquad \varphi(x) = \psi(x).$$

Pour un tel nombre x nous avons donc à la fois les formules (34) et (35) qui donnent, d'après (27):

$$(36)\qquad \psi(x) < \psi(x_0) - \frac{1}{l} + 2\varepsilon.$$

L'intervalle $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ étant intérieur à l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, nous avons démontré que pour tout nombre $\delta > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ existe un nombre x intérieur à l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pour lequel subsiste l'inégalite (36), ce qui prouve que $\omega(\psi, x_0) \geqslant \frac{1}{l}$, c'est-à-dire, d'après (26), que

$$\omega(\psi, a_{\alpha+\omega} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \frac{1}{l},$$

et démontre ainsi la quatrième des formules (22) pour $p = 0$. Les formules (22) sont donc vraies pour $p = 0$.

Supposons maintenant les formules (22) vraies pour une valeur entière et non négative de p. D'après la propriété de l'ensemble P, nous avons (pour tout $\alpha < \omega^\omega$):

$$a_{\alpha+\omega^{2p+2}} = \lim_{n=\infty} a_{\alpha+\omega^{2p+1}.n+\omega^{2p+1}},$$

donc:

$$a_{\alpha+\omega^{2p+2}} + r_l\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} (a_{\alpha+\omega^{2p+1}.n+\omega^{2p+1}}). \tag{37}$$

Or, d'aprés la quatrième des formules (22) nous avons (en remplaçant α par $\alpha + \omega^{2p+1} n$):

$$\omega(\psi, a_{\alpha+\omega^{2p+1}n+\omega^{2p+1}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \frac{p+1}{l};$$

la formule (37) démontre donc que

$$\omega(\psi, a_{\alpha+\omega^{2p+2}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \frac{p+1}{l}. \tag{38}$$

Posons, pour abréger

$$x_0 = a_{\alpha+\omega^{2p+2}} + r_l\sqrt{2}: \tag{39}$$

d'après la définition de la fonction $f(x)$ nous aurons:

$$f(x_0) = \frac{1}{l},$$

donc, d'après (21):

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) + \frac{1}{l}. \tag{40}$$

Soient δ et ε deux nombres positifs donnés quelconques. D'après (38) et (39) nous avons

$$M(\psi, x_0) - m(\psi, x_0) \geqslant \frac{p+1}{l}. \tag{41}$$

La fonction $\psi(x)$ étant semi-continue supérieurement, nous avons

$$M(\psi, x_0) = \psi(x_0). \tag{42}$$

Or, d'après la définition du minimum d'une fonction en un point, il existe un nombre ξ intérieur à l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tel que

$$\psi(\xi) < m(\psi, x_0) + \varepsilon. \tag{43}$$

Les formules (41), (42) et (43) donnent

$$\psi(\xi) < \psi(x_0) - \frac{p+1}{l} + \varepsilon. \tag{44}$$

La fonction $\psi(x)$ étant semi-continue supérieurement au point ξ, il existe un nombre positif δ_1 tel que l'intervalle $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ est intérieur à l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (auquel est intérieur ξ) et que

$$\psi(x) < \psi(\xi) + \varepsilon \quad \text{pour} \quad \xi - \delta_1 < x < \xi + \delta_1. \tag{45}$$

D'après (44) et (45) nous avons:

$$\psi(x) < \psi(x_0) - \frac{p+1}{l} + 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad \xi - \delta_1 < x < \xi + \delta_1. \tag{46}$$

Or, la fonction $f(x)$ étant nulle, sauf pour un ensemble dénombrable de points, il existe à l'intérieur de l'intervalle $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ un nombre x tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire, d'après (21):

$$\varphi(x) = \psi(x). \tag{47}$$

Pour un tel x nous avons à la fois les formules (46) et (47) qui donnent, d'après (40):

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) - \frac{p+2}{l} + 2\varepsilon.$$

Les nombres positifs δ et ε étant quelconques, nous en concluons, comme plus haut, que $\omega(\varphi, x_0) \geqq \frac{p+2}{l}$ c'est-à-dire, d'après (39):

$$\omega(\varphi, a_{\alpha+\omega^{2p+2}} + r_n\sqrt{2}) \geqq \frac{p+2}{l}. \tag{48}$$

D'aprés la propriété de l'ensemble P nous avons

$$a_{\alpha+\omega^{2p+3}} = \lim_{n=\infty} a_{\alpha+\omega^{2p+2}.n},$$

donc aussi

(49) $$a_{\alpha+\omega^{2p+3}} + r_l\sqrt{2} = \lim_{n=\infty}(a_{\alpha+\omega^{2p+2}.n} + r_l\sqrt{2}).$$

Or, d'aprés (48) nous avons (en remplaçant α par $\alpha+\omega^{2p+2}(n-1)$)

$$\omega(\varphi, a_{\alpha+\omega^{2p+2}.n} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \frac{p+2}{l}, \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

ce qui prouve, d'après (49), que

(50) $$\omega(\varphi, a_{\alpha+\omega^{2p+3}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \frac{p+2}{l}.$$

Posons, pour abréger:

(51) $$y_0 = a_{\alpha+\omega^{2p+3}} + r_l\sqrt{2}:$$

d'après la définition de $f(x)$ nous aurons: $f(y_0)=0$, donc, d'après (21):

(52) $$\psi(y_0) = \varphi(y_0).$$

Soient δ et ε deux nombres positifs donnés quelconques. En se basant sur la formule (50) et sur le fait que $\varphi(x)$ est une fonction semi-continue supérieurement est que la fonction $f(x)$ est nulle, sauf pour un ensemble dénombrable de points, nous démontrerons, comme plus haut, qu'il existe dans l'intervalle $(y_0-\delta, y_0+\delta)$ un nombre y, pour lequel subsiste simultanément l'inégalite

$$\varphi(y) < \varphi(y_0) - \frac{p+2}{l} + 2\varepsilon$$

et l'égalité

$$\psi(y) = \varphi(y),$$

qui donnent, d'aprés (52):

$$\psi(y) < \psi(y_0) - \frac{p+2}{l} + 2\varepsilon.$$

Les nombres positifs δ et ε étant quelconques, nous en concluons que $\omega(\psi, y_0) \geqslant \frac{p+2}{l}$, c'est-à-dire, d'après (51):

(53) $$\omega(\psi, a_{\alpha+\omega^{2p+3}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \frac{p+2}{l}.$$

Les formules (38), (48), (50) et (53) prouvent que les formules (22) restent vraies quand on y remplace p par $p+1$.

Nous avons donc démontré par l'induction que les formules (22) sont vraies pour $p=0, 1, 2, \dots$

Nous avons, comme on sait

$$\lim_{p=\infty} \omega^{2^p} = \omega^\omega,$$

donc, d'après la propriété de l'ensemble P:

$$\lim_{p=\infty} a_{\omega^{2p}} = a_{\omega^\omega} = 0$$

et aussi

$$\lim_{p=\infty} (a_{\omega^{2p}} + r_l\sqrt{2}) = r_l\sqrt{2}. \tag{54}$$

Or, la première des formules (22) donne pour $\alpha=0$:

$$\omega\,(\varphi, a_{\omega^{2p}} + r_l\sqrt{2}) \geqslant \frac{p+1}{2},$$

ce qui prouve, d'après (54) que

$$\omega\,(\varphi, r_l\sqrt{2}) = +\infty.$$

La fonction $\varphi(x)$ aurait donc une oscillation infinie en tout point $x=r_l\sqrt{2}$ $(l=1, 2, 3, \dots)$. Or ces points sont évidemment denses dans tout intervalle (puisque la suite $r_l\,(l=1, 2, 3, \dots)$ contient tous les nombres rationnels). La fonction $\varphi(x)$ aurait donc une oscillation infinie dans tout intervalle et serait par suite partout discontinue, ce qui est impossible, puisque $\varphi(x)$ est une fonction semi-continue.

L'hypothèse que la fonction $f(x)$ est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement conduit donc à une contradiction. Nous avons donc démontré que $f(x)$ n'est pas une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement, et par suite (d'après le théorème démontré dans l'article 1) n'est pas une somme d'une série absolument convergente de fonctions continues,

Or, remarquons qu'il résulte d'un théorème de M. Mazurkiewicz[1]) que toute fonction de la première classe est une somme d'une série absolument convergente de fonctions qui sont sommes

[1]) Voir sa note: „Sur les fonctions de classe 1". Ce volume, p. 32.

de séries absolument convergentes de fonctions continues. Or M. Kempisty a démontré qu'un ensemble E de fonctions qui contient toute fonction continue et qui contient toute somme d'une série absolument convergente de fonctions qui appartiennent à E, contient nécessairement toutes les fonctions représentables analytiquement [1]).

[1]) S. Kempisty: „Sur les séries itérées des fonctions continues", note qui paraîtra dans le même volume de ce journal.