Sur la décomposition d'un segment en une infinité d'ensembles non mesurables superposables deux à deux.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. On peut décomposer une droite en une infinité dénombrable d'ensembles non mesurables, sans points communs, superposables deux à deux par translation [1]). Comme l'a remarqué M. Steinhaus, nous ne savons pas résoudre le problème d'une décomposition analogue pour un segment, p. e. le segment $0 \leqq x \leqq 1$. Il paraît que ce problème est trés difficile.

2. Cette note contient la résolution d'un problème plus facile qui rentre dans le même ordre d'idées. — Je démontre le résultat suivant.

Il existe une décomposition du segment $0 \leqq x \leqq 1$ en c ensembles non mesurables, sans points communs, superposables deux à deux par translation (c désigne la puissance du continu).

3. La démonstration est basée sur la théorie de nombres transfinis, en particulier sur le théorème de M. Zermelo.

4. Désignons par I_1, I_2, I_3 les segments $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}$, $0 \leqq x \leqq \frac{2}{3}$ respectivement, par M l'ensemble de tous les ensembles parfaits, contenus dans I_3. α étant un nombre ordinal, désignons par $A(\alpha)$ l'ensemble de tous les nombres ordinaux inférieurs à α, par $\overline{\alpha}$ la puissance de $A(\alpha)$, par ω_c le premier nombre ordinal, tel que $\overline{\omega}_c = c$.

[1]) Vitali: Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, 1905 Comp. aussi: W. Sierpiński: Sur un ensemble non mesurable. Tohoku Math. Journ. vol. 12 (1917).

5. I_1, I_2 et M ont la puissance c, donc on peut supposer, que ces ensembles sont bien ordonnés d'après le type ω_c [1]. On a de cette manière trois suites:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \{u_\alpha\} & \\
(2) & \{v_\alpha\} & \alpha < \omega_c \\
(3) & \{P_\alpha\} &
\end{array}
$$

contenant respectivement tous les éléments de I_1, I_2, M.

6. On voit sans peine que notre problème se réduit à la démonstration de l'existence de deux ensembles B et E possédant les proprietés suivantes:

(p_1) $0 \subset E$
(p_2) E a la puissance c
(p_3) Si $x \subset B$, $y \subset E$, alors $x + y \subset I_1$
(p_4) Si $u \subset I_1$, on a $u = x + y$ pour un $x \subset B$ et un $y \subset E$
(p_5) Si $x \subset B$, $x' \subset B$, $y \subset E$, $y' \subset E$, $x + y = x' + y'$ — alors $x = x'$, $y = y'$
(p_6) B est non mesurable.

7. L'ensemble des nombres ordinaux supérieurs à 2 et inférieurs à ω_c a la puissance c de même que $A(\omega_c . 2)$ [2]. Il existe donc entre ces ensembles une correspondance biunivoque, en vertu de laquelle à tout nombre α du premier ensemble correspond un nombre $\varphi(\alpha)$ du second. Décomposons le premier ensemble en deux sous-ensembles complémentaires K_1 et K_2 par la convention:

$$
(4) \qquad \begin{array}{lll}
\alpha \subset K_1 & \text{si} & \varphi(\alpha) < \omega_c \\
\alpha \subset K_2 & \text{si} & \omega_c \leqq \varphi(\alpha);
\end{array}
$$

K_1 et K_2 ont évidemment la puissance c.

8. Soit $\{\beta_i\}$, $i = 1, \dots n$ une suite finie de nombres ordinaux, assujétis à l'inégalité:

$$
(5) \qquad \beta_i < \omega_c
$$

et soit $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ une fonction définie pour tout système de nombres ordinaux $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, assujétis aux inégalités:

$$
(6) \qquad \alpha_i < \beta_i.
$$

[1] Burstin: Wien. Sitzungsber. Abt. IIa, B. 125 (1916).

[2] Schoenfliess-Hahn: Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen I p. 131.

La réserve de valeurs de la fonction $f(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ est évidemment un ensemble de puissance égale ou inférieure à

$$\prod_{i=1}^{n} \overline{\beta}_i = \max. \overline{\beta}_i < c.$$ [1]

Cette remarque est essentielle pour la suite de notre raisonnement.

9. Définissons pour tout $\beta < \omega_c$ deux nombres b_β et e_β de manière suivante

I $b_1 = 0, \quad e_1 = 0$

II $b_2 = \frac{2}{3}, \quad e_2 = \frac{1}{3}$

III $\beta > 2$. Supposons les b_γ et les e_γ définis pour $\gamma < \beta$ et distinguons deux cas:

$$(z_1) \qquad \beta \subset K_1$$

b_β est alors le premier nombre de (1) contenu dans $P_{\varphi(\beta)}$ et différent de tous les nombres

$$(8) \qquad b_\gamma + e_\delta - e_\eta \qquad \gamma < \beta, \quad \delta < \beta, \quad \eta < \beta$$

e_β — le premier nombre de (2) différent de tous les nombres:

$$(9) \qquad b_\gamma - b_\delta + e_\eta \qquad \gamma < \beta + 1, \quad \delta < \beta + 1, \quad \eta < \beta.$$

b_β et e_β existent toujours, car les ensembles $P_{\varphi(\beta)}$ et I_2 sont de puissance c et les ensembles de points (8) et (9) — d'une puissance inférieure à c, d'après 8.

$$(z_2) \qquad \beta \subset K_2.$$

Soit u'_β le premier nombre de (1) différent de tous les nombres:

$$(10) \qquad b_\gamma + e_\delta \qquad \gamma < \beta, \quad \delta < \beta;$$

ce nombre existe, car I_1 a la puissance c, et l'ensemble de nombres (10) une puissance inférieure à c (d'après 8). On a de plus:

$$(11) \qquad u'_\beta \neq b_1 + e_1 = 0$$
$$(12) \qquad u'_\beta \neq b_2 + e_1 = \tfrac{2}{3}$$
$$(13) \qquad u'_\beta \neq b_2 + e_2 = 1.$$

Donc on aura une des deux inégalités:

$$(14) \qquad 0 < u'_\beta < \tfrac{2}{3}$$
$$(15) \qquad \tfrac{2}{3} < u'_\beta < 1.$$

[1] Schoenfliess-Hahn l. c. p. 135 (5).

Désignons par L l'un des deux intervalles: $0 < x < \frac{1}{3} u'_\beta$ et $u'_\beta - \frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$ suivant que l'on a (14) ou (15). e_β est le premier nombre de (2) contenu dans L et différent de tous les nombres:

$$\begin{aligned} &(16) && b_\gamma - b_\delta + e_\eta \\ &(17) && u'_\beta - b_\gamma + e_\delta - e_\eta \qquad \gamma < \beta, \quad \delta < \beta, \quad \eta < \beta \\ &(17\,\mathrm{a}) && \frac{u'_\beta - b_\delta + e_\eta}{2}. \end{aligned}$$

Ce nombre existe, car L a la puissance c, et (en vertu de **8**) l'ensemble de nombres (16), l'ensemble de nombres (17), enfin l'ensemble de nombres (17 a) et par suite leur ensemble somme[1]) ont une puissance inférieure à c. — Posons enfin:

$$b_\beta = u'_\beta - e_\beta. \tag{18}$$

10. Soit B l'ensemble de tous les b_β, E — l'ensemble de tous les e_β.

11. (p_1) est verifiée, à cause de **9**, I.

12. Pour démontrer (p_2) il suffit d'établir que $\beta < \lambda$ entraîne $e_\beta \neq e_\lambda$. C'est certainement le cas si $\beta = 1$, $\lambda = 2$. Dans le cas contraire on a, d'après la définition de e_λ:

$$e_\lambda \neq b_\gamma - b_\delta + e_\eta, \quad \gamma < \lambda, \ \delta < \lambda, \ \eta < \lambda. \tag{19}$$

Posons: $\gamma = \delta = 1$, $\eta = \beta$; non aura:

$$e_\lambda \neq e_\beta \qquad \text{c. q. f. d.} \tag{20}$$

13. D'après la définition de e_β on a toujours:

$$e_\beta \subset I_2. \tag{21}$$

Daus le cas I et II: $b_\beta \subset I_3$; dans le cas III (z_1): $b_\beta \subset P_{\varphi(\beta)} \subset I_3$; dans le cas III, (z_2), (14):

$$0 < u'_\beta - \tfrac{1}{3} u'_\beta < u'_\beta - e_\beta = b_\beta < u'_\beta < \tfrac{2}{3}, \tag{22}$$

enfin dans le cas III, (z_2), (15):

$$0 < \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} < u'_\beta - e_\beta = b_\beta < u'_\beta - (u'_\beta - \tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}. \tag{23}$$

Donc, dans tous les cas:

$$b_\beta \subset I_3. \tag{24}$$

(21) et (24) entraînent (p_3).

[1]) **Schoenflies-Hahn** l. c. p. 131. (1).

14. Pour démontrer (p_4) supposons le contraire. (1) contient alors un u_μ différent de tous les:

$$(25) \qquad b_\beta + e_\lambda \qquad \beta < \omega_c, \quad \lambda < \omega_c.$$

Pour $\beta \subset K_2$, u'_β est un nombre de la suite (1); désignons par $\sigma(\beta)$ son indice dans cette suite.

Pour $\beta \subset K_2$, $\lambda \subset K_2$, $\beta < \lambda$ on a d'aprés **9**, III, (z_2):

$$(26) \qquad u_{\sigma(\beta)} = u'_\beta = b_\beta + e_\beta$$

$$(27) \qquad u_{\sigma(\lambda)} = u'_\lambda \neq b_\gamma + e_\delta \qquad \gamma < \lambda, \ \delta < \lambda$$

donc, en particulier

$$(28) \qquad u_{\sigma(\lambda)} \neq b_\beta + e_\beta = u_{\sigma(\beta)}$$

$$(29) \qquad \sigma(\lambda) \neq \sigma(\beta).$$

A tout $\beta \subset K_2$ correspond un $\sigma(\beta)$ et à deux β différents correspondent deux $\sigma(\beta)$ différents. L'ensemble de tous les $\sigma(\beta)$ a par suite la même puissance que K_2, c. à. d. la puissance c. Comme $\mu < \omega_c$, il existe un β_1, tel que:

$$(30) \qquad \mu < \sigma(\beta_1).$$

D'après la définition de $u'_{\beta_1} = u_{\sigma(\beta_1)}$, tout nombre u_α pour $\alpha < \sigma(\beta_1)$, et en particulier u_μ, est de la forme (25). Nous arrivons ainsi à une contradiction. Donc (p_4) est démontré.

15. Pour établir (p_5) démontrons d'abord que l'on a pour tout $\beta < \omega_c$ et > 1

$$(31) \qquad e_\beta \neq b_\gamma - b_\delta + e_\eta \qquad \gamma \leqq \beta, \quad \delta \leqq \beta, \quad \eta < \beta$$

$$(32) \qquad b_\beta \neq b_\gamma - e_\delta + e_\eta \qquad \gamma < \beta, \quad \delta < \beta, \quad \eta < \beta.$$

Pour $\beta = 2$, on vérifie immédiatement, que ces inégalités ont lieu.

Dans le cas III, (z_1) — (31) et (32) sont une conséquence immédiate de la définition de b_β et e_β.

Dans le cas III, (z_2) — (31) est certainement vérifiée pour $\gamma < \beta$, $\delta < \beta$ (d'après la définition de e_β) et de même pour $\gamma = \delta = \beta$ (comp. **12**). Pour établir (31) on a donc qu'à démontrer les inégalités:

$$\begin{array}{ll} (33) & e_\beta \neq b_\beta - b_\delta + e_\eta \\ (34) & e_\beta \neq b_\gamma - b_\beta + e_\eta \end{array} \qquad \gamma < \beta, \quad \delta < \beta, \quad \eta < \beta.$$

Ces inégalités deviennent en vertu de (18)

$$e_\beta \neq \frac{u'_\beta - b_\delta + e_\eta}{2} \tag{35}$$

$$u'_\beta \neq b_\gamma + e_\eta \qquad \gamma < \beta, \quad \delta < \beta, \quad \eta < \beta \tag{36}$$

qui sont vérifiées en vertu de la définition de e_β et u'_β. Donc (31) est demontré.

L'inégalité (32) devient dans le cas III, (z_2):

$$e_\beta \neq u'_\beta - b_\gamma + e_\delta - e_\eta; \tag{37}$$

elle est donc vérifiée d'après la définition de e_β. Remarquons encore que (32) devient pour $\delta = \eta$:

$$b_\beta \neq b_\gamma \qquad \gamma < \beta \tag{38}$$

16. (p_5) sera établi, si nous démontrons, que l'égalité:

$$b_\beta + e_\gamma = b_\delta + e_\eta \tag{39}$$

n'est possible, que dans le cas où:

$$\beta = \delta, \quad \gamma = \eta. \tag{40}$$

Supposons que pour un système de nombres: β, δ, γ, η (39) est vérifiée, sans que l'on ai (40). Quatre cas sont possibles:

$$\beta = \delta, \quad \gamma \neq \eta \tag{41}$$

$$\beta \neq \delta, \quad \gamma = \eta \tag{42}$$

$$\beta \neq \delta, \quad \gamma \neq \eta, \quad \max.(\beta, \delta) > \max.(\gamma, \eta) \tag{43}$$

$$\beta \neq \delta, \quad \gamma \neq \eta, \quad \max.(\beta, \delta) \leqq \max.(\gamma, \eta). \tag{44}$$

Dans le cas (43), on peut supposer $\beta > \delta$, dans le cas (44): $\gamma > \eta$. L'égalité (39) devient dans les cas (41), (42), (43) (44) respectivement:

$$e_\gamma = e_\eta \qquad \gamma \neq \eta \tag{45}$$

$$b_\beta = b_\delta \qquad \beta \neq \delta \tag{46}$$

$$b_\beta = b_\delta - e_\gamma + e_\eta \qquad \gamma < \beta, \quad \delta < \beta, \quad \eta < \beta \tag{47}$$

$$e_\gamma = b_\delta - b_\beta + e_\eta \qquad \delta \leqq \gamma, \quad \beta \leqq \gamma, \quad \eta < \gamma. \tag{48}$$

Ces égalités sont impossibles, (45) — en vertu **12**, (20); (46) en vertu de **15**, (38); (47) — en vertu de **15**, (32); enfin (48) — en vertu de **15**, (31).

(p_5) est ainsi démontré.

17. Supposons B mesurable. P étant un ensemble parfait, contenu dans I_3, — il fait partie de la suite (3), — soit ϱ son numéro d'ordre dans cette suite. La correspondance $\varphi(\lambda)$ étant biunivoque, il existe un $\lambda_1 \subset K_1$ tel que

(49) $$\varphi(\lambda_1) = \varrho.$$

D'après 9, III, (z_1):

(50) $$b_{\lambda_1} \subset P_{\varphi(\lambda_1)} = P$$

donc:

(51) $$B \times P \neq 0$$

B a par suite de points communs avec tout ensemble parfait contenu dans I_3. Donc la mesure extérieure de $B = \frac{2}{3}$ [1]). B étant supposé mesurable, la mesure de $B = \frac{2}{3}$. Soit B_β l'ensemble de tous les points $b_\alpha + e_\beta$ $(\alpha < \omega_c)$. On a $B = B_1$ et, d'après (p_5):

(52) $$B \times B_2 = 0.$$

On obtient B_2 de B par la translation $x' = x + e_2 = x + \frac{1}{3}$. Donc B_2 est mesurable et de mesure $\frac{2}{3}$. Il s'ensuit, que la mesure de $B + B_2$ est égale à $\frac{4}{3}$ ce qui est absurde, car d'après (p_3):

(53) $$B + B_2 \subset I_1$$

et la mesure de I_1 est 1.

Donc B n'est pas mesurable et (p_6) est démontrée.

18. La décomposition

(54) $$I_1 = \Sigma B_\beta \qquad \beta < \omega_c$$

est la décomposition anoncée.

[1]) Burstin l. c. 2. Satz (p. 210).

Varsovie, le 13 Janvier 1920.