Sur les ensembles quasi-connexes.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Cette note contient la solution d'un problème qui m'a été communiqué par M. Sierpiński et qui se rattache étroitement à son mémoire: „*Sur les ensembles connexes et non connexes*" [1]).

2. **Définition.** Un ensemble A est *quasi-connexe*, si à tout point $p \subset A$ on peut faire correspondre un nombre $\lambda > 0$ de manière qu'il n'existe aucune décomposition $A = A_1 + A_2$, remplissant les conditions:

$$A_1 \times \overline{A_2} = \overline{A_1} \times A_2 = 0, \tag{1}$$

$$p \subset A_1; \quad \delta(A_1) < \lambda. \tag{2}$$

3. **Théorème:** Il existe un ensemble plan A quasi-connexe et tel que tous deux points de A sont séparés dans A.

L'ensemble E de M. Sierpiński n'est pas quasi-connexe tout en possédant la proprieté caractéristique des ensembles quasi-connexes en une infinité de points (ceux de l'ensemble Q). Nous allons construire l'ensemble cherché A en partant de l'ensemble E, par une simple méthode de condensation, en conservant les notations de M. Sierpiński.

4. Nous dénoterons par $\Gamma(B)$ la projection orthogonale de l'ensemble plan B sur l'axe d'abscisses.

5. $\Gamma(E)$ est parfait, non dense.

6. Une parallèle à l'axe des ordonnés rencontre l'ensemble E en un point au plus. J'omets la démonstration facile de ces deux énoncés.

[1]) Ce volume, p. 81 ss.

7. Soit $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\varepsilon > 0$. Considérons la transformation:

$$x' = 2\varepsilon x + (\alpha - \varepsilon), \tag{3}$$

$$y' = \begin{matrix} 2\beta y & \qquad y \leqq \frac{1}{2}, \\ 2(1-\beta)(y-1) + 1 & \qquad y \geqq \frac{1}{2}, \end{matrix} \tag{4}$$

c'est évidement une transformation biunivoque et bicontinue du plan.

8. Cette transformation transforme une parallèle à l'axe des ordonnées — en une parallèle à l'axe des ordonnées; le rectangle $H_0 = R(0, 1, 0, 1)$ en $R(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon, 0, 1)$; l'ensemble E en un ensemble, que nous désignerons par $E(\alpha, \beta, \varepsilon)$; l'ensemble $\Gamma(E)$ en $\Gamma(E(\alpha, \beta, \varepsilon))$, enfin les points: p_0, $M(H_0)$, $N(H_0)$ en les points:

$$x = \alpha,\ y = \beta; \quad x = \alpha,\ y = 0; \quad x = \alpha,\ y = 1$$

respectivement. Nous désignerons ces poins par: $p(\alpha, \beta)$, $M(\alpha)$, $N(\alpha)$.

9. D'après 5, 6 — $\Gamma(E(\alpha, \beta, \varepsilon))$ est parfait, non dense et toute parallèle à l'axe des ordonnées rencontre $E(\alpha, \beta, \varepsilon)$ en un point au plus.

10. Rangeons les points à deux coordonnées rationelles, intérieurs à H_0 en une suite $\{r_k\}$ $k = 1, 2 \ldots$ et désignons par ξ_k, η_k — les coordonnées de r_k.

11. Formons deux suites: $\{\alpha_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ de manière suivante:

I. $\alpha_1 = \xi_1$; ε_1 — positif, inférieur aux nombres positifs ξ_1 et $1 - \xi_1$, — d'ailleurs quelconque,

II. Supposons α_n, ε_n déterminés pour $n = 1, 2 \ldots k$. L'ensemble:

$$\sum_{n=1}^{k} \Gamma(E(\alpha_n, \eta_n, \varepsilon_n)) \tag{5}$$

est en vertu de 9 parfait non dense par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc déterminer un nombre α_{k+1}, n'appartenant pas à l'ensemble (5) et assujétti aux inégalités:

$$0 < \alpha_{k+1} < 1, \tag{6}$$

$$|\xi_{k+1} - \alpha_{k+1}| \leqq \frac{1}{k+1} \tag{7}$$

et un nombre ε_{k+1} assujétti aux inégalités:

$$0 < \varepsilon_{k+1} \begin{cases} < \alpha_{k+1} \\ < 1 - \alpha_{k+1} \end{cases} \tag{8}$$

et tel, que intervalle: $\alpha_{k+1} - \varepsilon_{k+1} \leqq x \leqq \alpha_{k+1} + \varepsilon_{k+1}$ ne contient aucun point de l'ensemble (5).

12. Posons:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k) \tag{9}$$

je dis que A est l'ensemble cherché.

13. On a:

$$E(\alpha_{k+1}, \eta_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subset R(\alpha_{k+1} - \varepsilon_{k+1}, \alpha_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, 0, 1) \subset H_0, \tag{10}$$

il s'ensuit, que $\Gamma(E(\alpha_{k+1}, \eta_{k+1}, \varepsilon_{k+1}))$ est contenu dans l'intervalle $\alpha_{k+1} - \varepsilon_{k+1} \leqq x \leqq \alpha_{k+1} + \varepsilon_{k+1}$, donc

$$\Gamma(E(\alpha_{k+1}, \eta_{k+1}, \varepsilon_{k+1})) \times \sum_{n=1}^{k} \Gamma(E(\alpha_n, \eta_n, \varepsilon_n)) = 0. \tag{11}$$

On aura par suite, pour $k \neq m$:

$$\Gamma(E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k)) \times \Gamma(E(\alpha_m, \eta_m, \varepsilon_m)) = 0. \tag{12}$$

14. Soient p_1, p_2 deux points de A, x_1, x_2 — leurs abscisses. En vertu de **9** et de (12) $x_1 \neq x_2$ et nous pouvons supposer $x_1 < x_2$. D'après **9** l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k))$ est de première catègorie par rapport à l'axe des abscisses, donc son complémentaire y — est dense et contient un nombre x_3 tel, que $x_1 < x_3 < x_2$. En désignant par D la droite: $x = x_3$, on a:

$$D \times A = 0. \tag{13}$$

Posons:

$$A_1 = A \times R(0, x_3, 0, 1); \quad A_2 = A \times R(x_3, 1, 0, 1) \tag{14}$$

on aura:

$$p_1 \subset A_1, \quad p_1 \subset A_2 \tag{15}$$

et, d'après (10)

$$A_1 + A_2 = A \tag{16}$$

enfin, en vertu de (13):

$$\overline{A_1} \times A_2 \subset [R(0, x_3, 0, 1) \times R(x_3, 1, 0, 1)] \times A \subset D \times A = 0, \tag{17}$$

$$A_1 \times \overline{A_2} \subset [R(0, x_3, 0, 1) \times R(x_3, 1, 0, 1)] \times A \subset D \times A = 0. \tag{18}$$

Donc, d e u x p o i n t s q u e l c o n q u e s p_1 e t p_2 de A s o n t s é p a r é s d a n s A.

15. Pour démontrer, que A est quasi-connexe, nous montrerons, que pour toute décomposition $A = A_1 + A_2$, remplissant les conditions:

$$A_1 \neq 0, \tag{19}$$

$$\overline{A_1} \times A_2 = A_1 \times \overline{A_2} = 0, \tag{20}$$

on a:

$$\delta(A_1) \geqq 1. \tag{21}$$

L'ensemble $\{r_k\}$ est dense par rapport à H_0 et il est de même pour l'ensemble $\{p(\alpha_k, \eta_k)\}$ car, en vertu de (7):

$$\varrho\,[r_k, p(\alpha_k, \eta_k)] \leqq \frac{1}{k}. \tag{22}$$

Comme d'après (10) $A \subset H_0$, $\{p(\alpha_k, \eta_k)\}$ est dense par rapport à A; c'est d'ailleurs un sous-ensemble de A, car $p_0 \subset E$, donc $p(\alpha_k, \eta_k) \subset E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k) \subset A$. En vertu de (19) et (20) A_2 ne peut pas contenir tous les points $p(\alpha_k, \eta_k)$, il existe donc un entier s tel que:

$$p(\alpha_s, \eta_s) \subset A_1. \tag{23}$$

Posons:

$$G_1 = A_1 \times E(\alpha_s, \eta_s, \varepsilon_s); \quad G_2 = A_2 \times E(\alpha_s, \eta_s, \varepsilon_s), \tag{24}$$

on aura:

$$p(\alpha_s, \eta_s) \subset G_1, \tag{25}$$

$$G_1 + G_2 = E(\alpha_s, \eta_s, \varepsilon_s), \tag{26}$$

$$\overline{G_1} \times G_2 = G_1 \times \overline{G_2} = 0. \tag{27}$$

L'inverse à la transformation 7 transforme G_1 et G_2 en deux ensembles E_1 et E_2 tels que:

$$p_0 \subset E_1, \tag{28}$$

$$E_1 + E_2 = E, \tag{29}$$

$$\overline{E_1} \times E_2 = E_1 \times \overline{E_2} = 0. \tag{30}$$

D'après la propriété fondamentale de l'ensemble E, démontrée par M. Sierpiński, ces formules entraînent:

$$M(H_0) \subset \overline{E}_1, \quad N(H_0) \subset \overline{E}_1, \tag{31}$$

donc

$$M(\alpha_s) \subset \overline{G_1} \subset \overline{A_1}; \quad N(\alpha_s) \subset \overline{G_1} \subset \overline{A_1}, \tag{32}$$

$$\delta(A_1) = \delta(\overline{A_1}) \geqq \varrho[M(\alpha_s), N(\alpha_s)] = 1 \quad \text{c. q. f. d.} \tag{33}$$

Donc A est quasi-connexe.

16. Remarquons encore que E, et par suite $E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k)$ étant des ensembles G_δ, A est un ensemble $G_{\delta\sigma}$.