Une remarque sur la notion de l'ordre.

Par

Wacław Sierpiński (Varsovie).

Dans la Note „*Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des ensembles*", insérée dans ce volume (p. 161—171), M. Kuratowski, en suivant les idées de MM. Hessenberg et Hartogs, s'occupe des *classes établissant un ordre* dans un ensemble donné M.

Il ne sera pas peut-être dépourvu d'intérêt de remarquer qu'on obtient aussi une classe établissant un ordre dans l'ensemble donné M, en considérant une classe $\mathfrak{M}$ qui vérifie les quatre conditions suivantes:

1° Les éléments de la classe $\mathfrak{M}$ sont des sous-ensembles (différents) de M.

2° De deux ensembles-éléments de $\mathfrak{M}$ l'un est toujours contenu dans l'autre.

3° X étant un ensemble-élément de $\mathfrak{M}$, il existe un élément x de X qui n'est pas élément d'aucun ensemble-élément de $\mathfrak{M}$ contenu dans X.

4° La classe $\mathfrak{M}$ est saturée par rapport à la propriété de satisfaire aux conditions 1°, 2° et 3°.

Une telle classe $\mathfrak{M}$ jouit de la propriété remarquable suivante: si l'on ordonne ses ensembles-éléments d'après leurs grandeurs croissantes, elle devient semblable à l'ensemble M dans lequel elle établit un ordre (Les classes de M. Kuratowski ne jouissent pas de cette propriété).

On pourrait notamment démontrer sans peine, en s'appuyant sur les conditions 1°—4°, que dans tout ensemble-élément X de $\mathfrak{M}$ existe un élément unique $x = \varphi(X)$ satisfaisant à la condition 3°, et que pour tout élément x de M existe un ensemble unique

$X = f(x)$, tel que $\varphi(X) = x$. On établit ainsi une correspondance biunivoque entre les ensembles-éléments de la classe $\mathfrak{M}$ et les éléments de l'ensemble M, et on voit aisément que si l'on pose $x \prec y$, lorsque $f(x) \subset f(y)$, l'ensemble M devient ordonné semblablement à la classe $\mathfrak{M}$, ordonnée d'après les grandeurs croissantes de ces ensembles-éléments.

On prouve aussi sans peine que pour tout ordre de M existe une classe $\mathfrak{M}$ unique satisfaisant aux conditions $1^0 - 4^0$ et établissant cet ordre (d'après la convention faite plus haut): c'est la classe formée par tous les ensembles X_a, où a est un élément quelconque de M et X_a désigne l'ensemble formé par a et par tous les éléments qui précèdent a dans M.