ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Une remarque sur la limite des nombres ordinaux.

Par

A. Hoborski (Cracovie).

§ 1.

On trouve chez M. Schoenflies[1]) le théorème suivant: Si les nombres ordinaux $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha_i+\beta\}$ constituent deux suites fondamentales et si $\beta>0$, on obtient pour les limites l'inégalité:

$$\operatorname{Lim}(\alpha_i+\beta)<(\operatorname{Lim}\alpha_i)+\beta.$$

M. Schoenflies ajoute la remarque qu'on peut démontrer ce théorème pour les nombres de la deuxième classe en s'appuyant sur la représentation cantorienne normale des nombres de la deuxième classe.

Je me suis proposé de trouver une démonstration générale et directe et dans ce but j'ai soumis la notion de la limite des nombres ordinaux à une étude un peu plus profonde qui m'a conduit à un théorème peut être inattendu. C'est le théorème III de notre Note, dont une conséquence immédiate est le théorème de M. Schoenflies, cité plus haut.

§ 2.

Je démontre d'abord le théorème suivant:

Théorème I. Si $\{\alpha_i\}$ est une suite fondamentale des nombres ordinaux, et si β_0 est sa limite, il existe un nombre naturel N et un nombre principal additif ξ_0 tel qu'on a:

$$\beta_0=\alpha_i+\xi_0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant N.$$

[1]) A. Schoenflies: Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Erste Hälfte (1913), p. 107.

Démonstration. Nous avons supposé qu'on a $\beta_0 = \operatorname{Lim} \alpha_i$, donc on a $\beta_0 > \alpha_i$ pour tout nombre naturel i. Il existe donc toujours un nombre ξ_i tel qu'on a:

$$\beta_0 = \alpha_i + \xi_i \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1.$$

Je dis qu'il est $\xi_i \geqslant \xi_{i+1}$ pour tout nombre naturel i. Supposons par contre qu'il existe un nombre naturel j pour lequel on a $\xi_j < \xi_{j+1}$; or, la suite α_i étant fondamentale, on a $\alpha_j < \alpha_{j+1}$; donc on obtient

$$\beta_0 = \alpha_j + \xi_j \leqslant \alpha_{j+1} + \xi_j < \alpha_{j+1} + \xi_{j+1} = \beta_0,$$

ce qui est impossible. On a donc toujours:

$$\xi_i \geqslant \xi_{i+1}.$$

Or, comme on sait, les nombres ordinaux ne peuvent pas constituer un ensemble du type $^*\omega$, par conséquent il existe un nombre naturel N tel que pour $i \geqslant N$ les nombres ξ_i ne dépendent pas de l'indice i: il existe donc un nombre fixe ξ_0 tel qu'on a $\xi_i = \xi_0$ pour $i \geqslant N$.

Nous avons ainsi obtenu l'égalité:

(1) $$\beta_0 = \alpha_i + \xi_0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant N.$$

Pour démontrer que le nombre ξ_0 est un nombre principal additif nous prouverons que le nombre ξ_0 est le plus petit reste > 0 du nombre β_0.

En effet, l'égalité (1) montre que le nombre ξ_0 est un reste (positif) du nombre β_0. Nous pouvons donc écrire:

(2) $$\beta_0 = \gamma + \varrho,$$

où ϱ est un reste (> 0) du nombre β_0. Il en résulte qu'on a

$$\beta_0 > \gamma$$

donc aussi:

$$\operatorname{Lim} \alpha_i > \gamma.$$

Il existe donc un nombre naturel i_0 tel que

$$\alpha_i > \gamma \quad \text{pour} \quad i \geqslant i_0$$

d'où il résulte

$$\alpha_i + \xi_0 \geqslant \gamma + \xi_0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant i_0.$$

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Si nous prenons $i \geqslant \max(i_0; N)$, nous pouvons écrire la dernière égalité sous la forme suivante:

$$\beta_0 \geqslant \gamma + \xi_0$$

et, d'après l'égalité (2), aussi sous la forme:

$$\gamma + \varrho \geqslant \gamma + \xi_0;$$

or ceci donne

$$\varrho \geqslant \xi_0.$$

Le nombre ξ_0 étant donc le reste (positif) minimum du nombre β_0, ξ_0 est un nombre principal additif.

Remarque. On voit sans peine que seulement deux cas peuvent se présenter: 1) on a $\alpha_i < \xi_0$ pour $i \geqslant 1$, ou bien, 2) il existe un indice N_0 tel qu'on a $\alpha_i > \xi_0$ pour $i \geqslant N_0$.

Le premier cas a lieu p. e. pour $\alpha_i = i$, le second cas pour $\alpha_i = \omega + i$; on a $\xi_0 = \omega$ dans ces deux cas. Dans le cas, où on a $\alpha_i < \xi_0$ pour $i \geqslant 1$, on a $\beta_0 = \xi_0$. Dans le deuxième cas, où on a $\alpha_i > \xi_0$ pour $i \geqslant N_0$, il existent les nombres γ_i et ϱ_i de façon qu'on reçoit

$$\alpha_i = \xi_0 \gamma_i + \varrho_i, \quad \varrho_i < \xi_0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant N_0$$

et donc on a

$$\beta_0 = \alpha_i + \xi_0 = (\xi_0 \gamma_i + \varrho_i) + \xi_0 = \xi_0 \gamma_i + (\varrho_i + \xi_0) =$$
$$= \xi_0 \gamma_i + \xi_0 = \xi_0 (\gamma_i + 1)$$

pour $i \geqslant N_0' = \max(N; N_0)$.

Le nombre β_0 étant fixe, on peut démontrer sans peine que le nombre γ_i doit être aussi constant pour $i \geqslant N_0'$. Il existe donc un nombre γ_0 indépendant de l'indice i et tel qu'on a $\gamma_i = \gamma_0$ pour $i \geqslant N_0'$.

On a donc

$$\beta_0 = \xi_0 (\gamma_0 + 1). \tag{3}$$

C'est le même résultat comme dans le premier cas, dans lequel, nous devons prendre $\gamma_0 = 0$. On a donc dans tous les cas l'équation (3).

On peut aussi sans peine démontrer que le nombre principal additif ξ_0 et le nombre γ_0 sont complètement déterminés par la limite β_0 [1].

Théorème II. Si $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha_i + \beta\}$ sont deux suites fondamentales des nombres ordinaux, on a $\beta < \xi_0$.

Démonstration. L'égalité $\beta = \xi_0$ est exclue, selon le théorème I.

[1] E. Jacobsthal: Aufbau der transfiniten Arithmetik. Mathematische Annalen. Bd. 66, p. 180.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Or, s'il serait $\beta > \xi_0$, il existerait un nombre τ, indépendant de i et tel qu'on aurait $\beta = \xi_0 + \tau$; il en résulterait:

$$\alpha_i + \beta = \alpha_i + (\xi_0 + \tau) = (\alpha_i + \xi_0) + \tau$$

et cette somme aurait une valeur constante pour $i \geqslant N$, contrairement à l'hypothèse. Il est donc nécessairement

$$\beta < \xi_0.$$

Théorème III. Si $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha_i + \beta\}$ sont deux suites fondamentales, on a:

$$\operatorname{Lim} \alpha_i = \operatorname{Lim} (\alpha_i + \beta).$$

Démonstration 1. Comme on a $\beta \geqslant 0$, on obtient $\alpha_i \leqslant \alpha_i + \beta$ pour $i \geqslant 1$, d'où il résulte:

$$\operatorname{Lim} \alpha_i \leqslant \operatorname{Lim} (\alpha_i + \beta). \tag{4}$$

D'après le théorème II il est ici $\beta < \xi_0$; ainsi on a:

$$\alpha_i + \beta < \alpha_i + \xi_0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1.$$

Mais la suite $\{\alpha_i + \xi_0\}$ ne contient, d'après le théorème I, qu'un nombre fini des nombres différents et il est facile à voir que $\operatorname{Lim} \alpha_i$ est le plus grand nombre de cette suite. On a donc:

$$\alpha_i + \beta < \operatorname{Lim} \alpha_i,$$

d'où il résulte

$$\operatorname{Lim} (\alpha_i + \beta) \leqslant \operatorname{Lim} \alpha_i. \tag{5}$$

Les relations (4) et (5) donnent ainsi immédiatement l'égalité:

$$\operatorname{Lim} \alpha_i = \operatorname{Lim} (\alpha_i + \beta) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Démonstration 2. Nous démontrerons notre théorème aussi d'une autre manière.

Appelons X l'ensemble des nombres ξ pour lesquels il existe un nombre naturel N_ξ dépendant de ξ et tel que la somme $\alpha_i + \xi$ ait pour $i \geqslant N_\xi$ une valeur indépendante de i. Selon le théorème I l'ensemble X n'est pas vide, mais aussi sans faire appel à ce théorème on pourrait l'affirmer, puisqu'il suffit de prendre pour ξ un nombre principal additif plus grand que $\operatorname{Lim} \alpha_i$. L'ensemble X possède ainsi le plus petit nombre ξ_0'. Nous montrons maintenant qu'on a $\xi_0' = \xi_0$.

Nous constatons d'abord que tout nombre ξ satisfaisant à l'inégalité $\xi \geqslant \xi_0'$ appartient à l'ensemble X. Le théorème I montre ensuite que le nombre ξ_0 y appartient; on a donc:

(6) $$\xi_0 \geqslant \xi_0'.$$

Pour le nombre ξ_0' il existe un nombre naturel N_0' tel que la somme $\alpha_i + \xi_0'$ ait pour $i \geqslant N_0'$ une valeur indépendante de l'indice i: désignons la par ε; on a donc

$$\varepsilon = \alpha_i + \xi_0' \quad \text{pour} \quad i \geqslant N_0'.$$

Nous avons $\xi_0' > 0$, donc on a aussi

$$\varepsilon > \alpha_i \quad \text{pour} \quad i \geqslant N_0'$$

et, à plus forte raison pour $i \geqslant 1$. Nous avons ainsi:

$$\varepsilon \geqslant \operatorname{Lim} \alpha_i,$$

donc

$$\alpha_i + \xi_0' \geqslant \alpha_i + \xi_0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant \max(N_0'; N),$$

ce qui donne

(7) $$\xi_0' \geqslant \xi_0.$$

Les relations (6) et (7) démontrent qu'on a:

$$\xi_0' = \xi_0.$$

Désignons par Y l'ensemble des nombres η en lequel se change l'ensemble X, si l'on remplace les nombres α_i par les nombres $\alpha_i + \beta$. Par η_0 désignons le plus petit nombre de l'ensemble Y. D'après les théorèmes I et II nous avons

$$\alpha_i + \beta + \xi_0 = \alpha_i + \xi_0$$

et cette somme a pour $i \geqslant N$ une valeur indépendante de i; cela montre que le nombre ξ_0 appartient aussi à l'ensemble Y, et par conséquent on a:

(8) $$\xi_0 \geqslant \eta_0.$$

D'après la définition du nombre η_0, il existe un nombre naturel N_1 tel que la somme $\alpha_i + \beta + \eta_0$ ait pour $i \geqslant N_1$ une valeur indépendante de i; il en résulte que le nombre $\beta + \eta_0$ appartient à l'ensemble X, donc on doit avoir:

(9) $$\beta + \eta_0 \geqslant \xi_0.$$

L'inégalité (8) donne aussi:

(10) $$\beta + \xi_0 \geqslant \beta + \eta_0$$

et les relations (9) et (10) avec l'égalité:

$$\xi_0 = \beta + \xi_0$$

donnent la relation

$$\beta + \xi_0 \geqslant \beta + \eta_0 \geqslant \beta + \xi_0$$

c'est-à-dire:

$$\xi_0 \geqslant \eta_0 \geqslant \xi_0,$$

d'où il résulte

$$\xi_0 = \eta_0$$

ce qui démontre qu'on a

$$\alpha_i + \beta + \eta_0 = \alpha_i + \beta + \xi_0 = \alpha_i + \xi_0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1$$

donc aussi pour $i \geqslant \max(N; N_1)$, ce qui démontre qu'on a

$$\operatorname{Lim}(\alpha_i + \beta) = \operatorname{Lim} \alpha_i \qquad \text{c. q. f. d.}$$

30 Octobre 1920.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki