Über die Komponenten offener Mengen.

Von

Hans Hahn (Bonn).

Bei der Aufgabe, die stetigen Kurven rein topologisch zu charakterisieren, sind sowohl Herr St Mazurkiewicz[1]) als ich[2]) auf eine Eigenschaft gestossen[3]), die ich als *Zusammenhang im Kleinen* bezeichnet habe, und die wohl auch in anderen Fragen der topologischen Theorie der Punktmengen von Bedeutung sein dürfte. Eine solche Frage will ich hier vorführen. Zunächst sei an einige Definitionen erinnert.

Wir legen unseren Untersuchungen einen metrischen Raum[4]) zugrunde, und bezeichnen nach F. Hausdorff[5]) eine Punktmenge $\mathfrak{A}$ dieses Raumes als *zusammenhängend*, wenn sie nicht Vereinigung zweier in $\mathfrak{A}$ abgeschlossener, nicht leerer, zu einander fremder Teile ist. Bilden wir zu einem Punkte a einer beliebigen Menge $\mathfrak{M}$ die Vereinigung aller a enthaltenden, zusammenhängenden Teile von $\mathfrak{M}$, so entsteht wieder eine zusammenhängende Menge; sie ist offenbar der umfassendste, a enthaltende und zusammenhängende Teil von $\mathfrak{M}$ und wird als eine Komponente von $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Es gilt der Satz[6]): jede beliebige Menge $\mathfrak{M}$ kann auf eine und nur

[1]) *Fund. Math.* 1 (1920), S. 166, wo man auch Hinweise auf frühere Arbeiten des Herrn Mazurkiewicz findet.

[2]) *Wien. Ber.* 123 (1914), S. 2433.

[3]) Auf eine verwandte Eigenschaft war auch Pia Nalli bei der Untersuchung des Randes ebener Gebiete gestossen. *Rend. Pal.* 32 (1911), S. 392.

[4]) Vgl. H. Hahn: Theorie der reellen Funktionen (Berlin, J. Springer 1920), S. 52

[5]) Grundzüge der Mengenlehre, S. 244.

[6]) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre S. 246, oder H. Hahn: Theorie der reellen Funktionen S. 87.

eine Weise als Vereinigung zu je zweien fremder Komponenten dargestellt werden.

Nun bezeichnen wir in üblicher Weise als *offene* Punktmenge jede Punktmenge unseres Raumes, deren Komplement *abgeschlossen* ist. Bekanntlich gilt dann in den euklidischen Räumen der Satz: Jede Komponente einer offenen Menge ist offen. Ich habe an folgendem Beispiele [1]) gezeigt, dass dies nicht in jedem metrischen Raume gilt: Wir wählen als metrischen Raum $\mathfrak{R}$ die Menge aller Punkte der x-Achse, die nach Tilgung der abzählbar vielen abgeschlossenen Intervalle $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ übrig bleibt; der Abstandsbegriff in $\mathfrak{R}$ sei derselbe, wie auf der x-Achse:

$$\varrho(x', x'') = |x' - x''|.$$

Der metrische Raum selbst ist immer offen, da sein Komplement, die leere Menge, abgeschlossen ist. Eine der Komponenten unsres Raumes $\mathfrak{R}$ ist die Halbachse $x \leqq 0$, und diese ist nicht offen in $\mathfrak{R}$, da der zu ihr gehörige Punkt $x = 0$ Häufungspunkt nicht zu ihr gehöriger Punkte von $\mathfrak{R}$ ist.

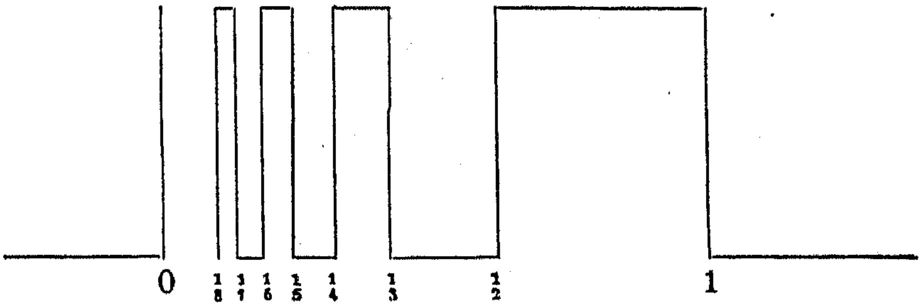
Die vielleicht naheliegende Annahme, dies rühre daher, dass der zugrunde gelegte Raum $\mathfrak{R}$ nicht zusammenhängend ist, dass aber in einem zusammenhängenden Raume jede Komponente einer offenen Menge offen sein müsse, trifft nicht zu, wie folgendes Beispiel lehrt. Wir gehen aus von der xy-Ebene, und betrachten in ihr die Punktmenge, die aus der vorhin benutzten, von der x-Achse nach Tilgung der Intervalle $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ übrig bleibenden, entsteht, indem man von der Geraden $y = 1$ die Intervalle $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und von jeder Geraden $x = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, sowie von der Geraden $x = 0$ die Verbindungsstrecken $0 < y < 1$ hinzufügt. Die so entstehende Punktmenge (vgl. die Figur) ist offenbar zusammenhängend. Wir wählen sie als metrischen Raum $\mathfrak{R}$; der Abstandsbegriff sei derselbe wie in der xy-Ebene:

$$\varrho((x', y'), (x'', y'')) = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}.$$

Wir tilgen nun aus $\mathfrak{R}$ die Menge aller auf der Geraden $y = 1$

[1]) Theorie der reellen Funktionen S. 87.

liegenden Punkte; da diese Menge abgeschlossen ist, so ist die Menge $\mathfrak{M}$ der übrigen Punkte von $\mathfrak{R}$ offen. Eine Komponente von $\mathfrak{M}$ besteht aus dem Teile $x \leqslant 0$ der x-Achse und der Strecke $0 < y < 1$ der y-Achse. Diese Komponente $\mathfrak{A}$ ist nicht offen (in $\mathfrak{R}$)



da jeder ihrer auf der y-Achse gelegenen Punkte Häufungspunkt nicht zu $\mathfrak{A}$ gehöriger Punkte von $\mathfrak{R}$ ist.

Es entsteht also die Aufgabe festzustellen: wie muss ein metrischer Raum beschaffen sein, damit in ihm jede Komponente einer offenen Menge offen sei? Die Antwort wird geliefert durch den Begriff des Zusammenhanges im Kleinen, an den wir zunächst erinnern: Die Menge $\mathfrak{A}$ heisst im Punkte a zusammenhängend im Kleinen, wenn es zu jeder Umgebung[1]) $\mathfrak{U}$ von a eine Umgebung $\mathfrak{U}_1$ von a gibt mit folgender Eigenschaft: ist a_1 ein in $\mathfrak{U}_1$ gelegener Punkt von $\mathfrak{A}$, so gibt es einen in $\mathfrak{U}$ gelegenen, zusammenhängenden Teil von $\mathfrak{A}$, der sowohl a als a_1 enthält. Und nun behaupten wir: *Damit im metrischen Raume $\mathfrak{R}$ jede Komponente einer offenen Menge offen sei, ist notwendig und hinreichend, dass der Raum $\mathfrak{R}$ in jedem seiner Punkte zusammenhängend im Kleinen sei.*

Die Bedingung ist *notwendig*. Angenommen in der Tat, $\mathfrak{R}$ sei im Punkte a nicht zusammenhängend im Kleinen. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von a mit folgender Eigenschaft: es existiert eine Folge von Punkten a_n mit $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$, derart dass jede zusammenhängende Menge, die sowohl a als a_n enthält, mindestens einen nicht zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Punkt enthält. Die Umgebung $\mathfrak{U}$ selbst ist eine offene Menge. Sei $\mathfrak{A}$ ihre den Punkt a enhaltende Komponente. Wir behaupten: $\mathfrak{A}$ *ist nicht offen*. In der Tat, $\mathfrak{A}$ kann keinen der Punkte a_n enthalten, da sonst $\mathfrak{A}$ eine ganz in $\mathfrak{U}$ liegende, zusammenhängende Menge wäre, die sowohl a wie a_n ent-

[1]) Als eine *Umgebung* von a bezeichnen wir jede a enthaltende offene Menge.

hielte, was es nicht gibt. Also ist der Punkt a von $\mathfrak{A}$ Häufungspunkt nicht zu $\mathfrak{A}$ gehöriger Punkte. Also ist $\mathfrak{A}$ nicht offen, wie behauptet.

Die Bedingung ist hinreichend. Wir nehmen an, sie sei erfüllt, und haben zu zeigen: Ist $\mathfrak{A}$ Komponente der offenen Menge $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{A}$ offen. Zu dem Zwecke genügt es, zu zeigen: das Komplement $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen. Sei also a ein Häufungspunkt von $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$; wir haben zu beweisen: a gehört zu $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$. Angenommen, a gehörte zu $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ Teil von $\mathfrak{M}$, so gehört dann a auch zu $\mathfrak{M}$, und da $\mathfrak{M}$ offen, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von a, die ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört. Da $\mathfrak{R}$ zusammenhängend im Kleinen, gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}_1$ von a von folgender Eigenschaft: jeder Punkt a_1 von $\mathfrak{U}_1$ ist enthalten in einer auch a enthaltenden, zusammenhängenden Menge $\mathfrak{B}$, die ganz in $\mathfrak{A}$ liegt. Da $\mathfrak{U}$ Teil von $\mathfrak{M}$ ist, so ist dann auch $\mathfrak{B}$ Teil von $\mathfrak{M}$. Da sowohl $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{B}$ zusammenhängend sind, und da sie den Punkt a gemein haben, ist auch ihre Vereinigung ein zusammenhängender Teil von $\mathfrak{M}$. Als Komponente von $\mathfrak{M}$ aber ist $\mathfrak{A}$ der grösste a enthaltende zusammenhängende Teil von $\mathfrak{M}$. Es muss also $\mathfrak{B}$ Teil von $\mathfrak{A}$ sein und da $\mathfrak{B}$ den Punkt a_1 enthält, ist a_1 Punkt von $\mathfrak{A}$. Wir sehen also: $\mathfrak{A}$ enthällt sämtliche Punkte von $\mathfrak{U}_1$. Dies aber steht im Widerspruche zur Annahme, a sei Häufungspunkt von $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$. Also führt die Annahme, a gehöre zu $\mathfrak{A}$, auf einen Widerspruch, und die Behauptung ist bewiesen.