Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer l'équivalence de trois propriétés suivantes des classes ($\mathfrak{L}$) (c'est-à-dire des classes où la limite est définie [1])):

Propriété I: *Tout ensemble non dénombrable d'éléments de la classe considérée contient au moins un élément de condensation.*

Propriété II: *Tout ensemble clairsemé d'éléments de la classe considérée est au plus dénombrable.*

Propriété III: *Toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés distincts d'éléments de la classe considérée, dont chacun contient tous les suivants, est dénombrable.*

Pour démontrer notre proposition il suffira évidemment de démontrer que: 1) la propriété I entraîne II, 2) II entraîne III, et 3) III entraîne I. Cela nous faisons dans les trois premiers §§ de notre note. Dans les §§ suivants nous étudions le rapport de la propriété III à une propriété analogue concernant les suites transfinies ascendentes d'ensembles fermés, c'est-à-dire à la

Propriété IV: *Toute infinité bien ordonnée d'ensembles distincts d'éléments de la classe considérée, dont chacun est fermé et contient les précédents, est dénombrable.*

Je démontre que les propriétés III et IV sont indépendantes et que la propriété IV est équivalente à la propriété V suivante:

[1]) Voir M. Fréchet: Thèse, § 7 (*Rendiconti di Palermo*, t. 21).

Propriété V: *Tout ensemble E tiré de la classe considérée contient un sous-ensemble dénombrable D, dense en E* (c'est à-dire tel que $E \subset D + D'$).

1. Considérons une classe $(\mathfrak{L})$ jouissant de la propriété I, et soit E un ensemble non dénombrable donné d'éléments de cette classe Désignons par C l'ensemble de tous ces éléments de E qui sont éléments de condensation de E [1]) (au moins un tel élément existe, d'après l'hypothèse sur notre classe). Posons $E - C = D$: ce sera un ensemble au plus dénombrable, puisque autrement, d'après la propriété I de notre classe, D contiendrait un élément de condensation de D qui serait, à plus forte raison, élément de condensation de E et parsuite rentrerait dans C, ce qui est impossible, C et D n'ayant pas d'éléments communs.

Or je dis que tout élement de C est un élément de condensation de C. En effet, soit p un élément de C qui n'est pas un élément de condensation de C. On peut donc supprimer de C une infinité dénombrable d'éléments D_1, de façon que p soit un élément isolé de l'ensemble $C - D_1$. Or, nous avons évidemment $C - D_1 = E - (D + D_1)$; donc, p est un élément isolé de l'ensemble qu'on obtient en supprimant de E l'ensemble dénombrable $D + D_1$, ce qui est impossible, p, comme élément de C, étant un élément de condensation de E.

Nous avons donc démontré que dans notre classe tout ensemble non dénombrable est une somme d'un ensemble au plus dénombrable et d'un ensemble dense en soi (même tel que tout son élément est son élément de condensation). Il en résulte tout de suite que tout ensemble d'éléments de notre classe ne contenant aucun sous-ensemble dense en soi — c'est-à-dire tout ensemble *clairsemé* — est au plus dénombrable. La propriété I entraîne donc la propriété II.

[1]) On appelle, d'après M. Fréchet (l. c. § 8) *élément de condensation* d'un ensemble E un élément limite de E qui est aussi un élément limite de tout ensemble obtenu en supprimant de E une infinité dénombrable d'éléments. On peut donner encore une autre définition d'élément de condensation, équivalente à celle de M. Fréchet et tout à fait analogue à celle de M. Lindelöf, en introduisant la notion d'*entourage* d'un élément p. Nous appelons ainsi tout ensemble I d'éléments de la classe considérée auquel p est intérieur (c'est-à-dire n'est pas limite d'une suite d'éléments de la classe n'appartenant pas à I). En effet, on peut démontrer sans peine que pour qu'un élément p soit élément de condensation d'un ensemble E (au sens de M Fréchet), il faut et il suffit que tout entourage de p contienne (au sens large) une infinité non dénombrable d'éléments de E.

2. Considérons maintenant une classe $(\mathfrak{L})$ jouissant de la propriété II et soit

(1) $$F_1, F_2, F_3 \ldots F_\omega, F_{\omega+1}, \ldots, F_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \gamma)$$

une suite transfinie du type γ d'ensembles fermés. tirés de notre classe, tous distincts, telle que $F_\alpha \supset F_\beta$ pour $\alpha < \beta$. L'ensemble F_α contenant l'ensemble $F_{\alpha+1} \neq F_\alpha$, nous concluons que F_α contient au moins un élément, soit p_α, n'appartenant pas à $F_{\alpha+1}$; or, F_α étant fermé, p_α n'est pas limite d'aucune suite d'éléments de $F_{\alpha+1}$. Tous les termes de la suite transfinie du type γ

(2) $$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \gamma)$$

seront donc distincts et on voit sans peine que p_α n'est pas limite d'aucune suite $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, p_{\alpha_3} \ldots$ où tous les indices α_n sont $> \alpha$ (puisque tous les termes d'une telle suite sont évidemment éléments de $F_{\alpha+1}$).

Je dis que l'ensemble de tous les éléments (2) est clairsemé. En effet, supposons que G est un sous-ensemble dense en soi de l'ensemble (2) et soit p_μ le premier terme de la suite (2) appartenant à G. L'ensemble G étant dense en soi, p_μ est limite d'une suite, soit $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, p_{\alpha_3} \ldots$ d'éléments de G autres que p_μ, donc de termes de la suite (2) dont les indices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sont tous $> \mu$ (p_μ étant le premier terme de (2) appartenant à G). Or, c'est impossible, d'après la propriété de la suite (2) démontrée plus haut.

L'ensemble (infinie) (2) est donc clairsemé, et parsuite, d'après la propriété II de la classe considerée, dénombrable. Par conséquent l'ensemble (1) est aussi dénombrable. Nous avons ainsi démontré que la propriété II entraîne la propriété III.

Quant à la propriété III, on voit aisément qu'elle peut être encore exprimée de la manière suivante:

Supposons qu'à chaque nombre ordinal $\alpha < \Omega$ corresponde un ensemble fermé F_α tiré de la classe considérée. Si chacun de ces ensembles fait partie des ensembles d'indices inférieurs, il existe un nombre $\beta < \Omega$ tel que l'ensemble F_Ω des éléments communs à tous les ensembles F_α soit identique à F_β [1]).

[1]) Cette propriété entraîne, comme on sait, le théorème de Cantor-Bendixson (pour les ensembles fermés de la classe considérée) et une formule de structure connue.

3. Considérons enfin nne classe $(\mathfrak{L})$ jouissant de la propriété III et soit E un ensemble non dénombrable donné, tiré de notre classe. Admettons que l'ensemble E ne contient aucun élément de condensation. Il s'en suit alors de la définition de ce dernier que pour tout élément p de E existe un ensemble dénombrable $D(p)$, tel que p n'est pas limite d'aucune suite d'éléments appartenant à $E-D(p)$. Nous pouvons encore supposer que $D(p)$ contient p.

Soit

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\alpha, \dots \tag{3}$$

un ensemble bien ordonné, formé de tous les éléments de l'ensemble E. Nous définirons une suite transfinie du type Ω (Ω désignant le plus petit nombre de la 3^{me} classe)

$$q_1, q_2, q_3 \dots, q_\omega, q_{\omega+1}, \dots, q_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega) \tag{4}$$

d'élément de l'ensemble E comme il suit.

Posons $q_1 \doteq p_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini les éléments q_ξ pour $\xi < \alpha$. Désignons $S_\alpha = \sum\limits_{\xi<\alpha} D(q_\xi)$: ce sera évidemment un ensemble dénombrable (α étant $< \Omega$ et les ensembles $D(p)$ étant tous dénombrables). Donc la suite (non dénombrable) (3) contient des éléments n'appartenant pas à S_α: l'élément q_α sera défini comme le premier d'entre eux. La suite transfinie (4) est ainsi définie par l'induction transfinie et tous ses termes sont évidemment éléments distincts de E.

Désignons maintenant par Q_α l'ensemble de tous les éléments q_ξ pour $\xi \geqslant \alpha$. Je dis que q_α est un élément isolé de Q_α. En effet, s'il était autrement, q_α serait limite d'une suite, soit $q_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, q_{\alpha_3}, \dots$ d'éléments de Q_α autres que q_α, donc de termes de la suite (4) dont les indices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ sont tous $> \alpha$. Or c'est impossible, puisque, pour $\lambda > \alpha$, q_ξ est un élément de $E - S_\lambda = E - \sum\limits_{\xi<\lambda} D(q_\xi) \subset E - D(q_\alpha)$ et q_α n'est pas limite d'aucune suite d'éléments appartenant à $E - D(q_\alpha)$.

Posons maintenant

$$F_\alpha = Q_\alpha + Q'_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha < \Omega$$

Les ensembles F_α ($\alpha < \Omega$) seront évidemment fermés, chacun contenant tous les suivants (puisque évidemment $Q_\alpha \supset Q_\beta$ pour $\alpha < \beta$) et il seront tous distincts. En effet, comme nous avons démontré, q_α est un élément isolé de Q_α, évidemment n'appartenant à $Q_{\alpha+1}$ et non plus à $Q'_{\alpha+1} \subset Q'_\alpha$ (comme élément isolé de Q_α): l'ensemble F_α contient donc l'élément q_α n'appartenant pas à $F_{\alpha+1} = Q_{\alpha+1} + Q'_{\alpha+1}$. Par conséquent $F_\alpha \neq F_{\alpha+1}$ et, à plus forte raison $F_\alpha \neq F_\beta$ pour $\alpha < \beta$).

Il existerait donc une suite transfinie non dénombrable F_α ($\alpha < \Omega$) d'ensembles fermés distincts tirés de notre classe, dont chacun contient tous les suivants, contrairement à la propriété III de la classe considerée. L'hypothèse que l'ensemble E ne contient aucun élément de condensation imlique donc une contradiction. Nous avons donc démontré que la propriété III entraîne la propriété I.

Nous avons ainsi démontré dans les §§ 1—3 que la propriété I entraîne II. II entraîne III et III entraîne I Il en résulte tout de suite que l e s p r o p r i é t é s I, II et III s o n t é q u i v a l e n t e s.

4. La question se pose maintenant: la propriété III est-elle équivalente à une propriété analogue concernant les suites ascendantes d'ensembles fermés, c'est-à-dire à la propriété IV? Nous démontrerons que ce n'est as le cas, notamment que les propriétés III et IV sont indépendantes l'une de l'autre.

Nous prouverons d'abord que la propriété IV est équivalente à la propriété V (voir l'introduction..

Considérons donc une classe ($\mathfrak{L}$) jouissant de la propriété IV et supposons qu'elle ne jouit pas de la propriété V

Soit

$$(5) \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\alpha, \ldots$$

un ensemble bien ordonné, formé de tous les éléments de notre classe. Ce sera un ensemble du type $\geqslant \Omega$, puisque notre classe, comme ne jouissant pas de la propriété V, est évidemment non dénombrable. Nous définirons une suite transfinie du type Ω,

$$(6) \qquad q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\omega, q_{\omega+1}, \ldots, q_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

d'éléments de notre classe comme il suit. Posons $q_1 = p_1$. Soit maintenant α un nombre ordina donné $< \Omega$ et supposons que nous avons défini tous les éléments q_ξ pour $\xi < \alpha$. Leur ensemble Q_α étant au plus dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$) et notre classe ne jouissant pas de la propriété V, Q_α ne peut être dense dans l'ensemble de tous les éléments de notre classe: il existe donc des éléments de la suite (5) qui ne sont limites d'aucune suite d'éléments de Q_α; nous définirons q_α comme le premier d'entre eux. La suite (6) est ainsi définie par l'induction transfinie.

Posons maintenant

$$F_\alpha = Q_\alpha + Q'_\alpha.$$

Les ensembles $F_\alpha (\alpha < \Omega)$ seront évidemment fermés, chacun faisant partie des suivants (puisque évidemment $Q_\alpha \subset Q_\beta$ pour $\alpha < \beta$) et il seront tous distincts. En effet, d'après la définition de la suite (6) et celle des ensembles Q, q_α est un élément isolé de $Q_{\alpha+1} \subset F_{\alpha+1}$ et n'est pas contenu dans Q_α: donc q_α n'est pas contenu dans $Q'_{+1} \subset Q_\alpha$ et non plus dans $Q_\alpha + Q'_\alpha = F_\alpha$. Nous avons donc $F_\alpha \neq F_{\alpha+1}$ et, à plus forte raison, $F_\alpha \neq F_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$. Il existerait donc une suite transfinie non dénombrable $F_\alpha (\alpha < \Omega)$ d'ensembles fermés distincts d'éléments de notre classe, dont chacun contient les précédents, contrairement à la propriété IV de la classe considérée.

Nous avons donc démontré que la propriété IV entraîne la propriété V.

Considérons maintenant une classe $(\mathfrak{L})$ jouissant de la propriété V et supposons qu'elle ne jouit pas de la propriété IV. Il existe donc une suite transfinie non dénombrable

$$(7) \qquad F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\omega, F_{\omega+1} \ldots \ldots F_\alpha, \ldots$$

d'ensembles distintcs tirés de notre classe, dont chacun est fermé et contient les précédents. L'ensemble $F_{\alpha+1}$ contenant l'ensemble $F_\alpha \neq F_{\alpha+1}$, nous concluons que $F_{\alpha+1}$ contient un élément, soit q_α n'appartenant pas à F_α; or, F_α contenant tous les ensembles $F_{\xi+1}$ pour $\xi < \alpha$, F_α contient tous les éléments q_ξ pour $\xi < \alpha$: donc, F_α étant fermé et ne contenant q_α, q_α n'est pas limite d'aucune suite d'éléments de F_α, donc d'aucune suite q_{α_n}, où $\alpha_n < \alpha (n = 1, 2, 3, \ldots)$. Il en résulte tout de suite que l'ensemble (non dénombrable) E de tous les éléments de la suite transfinie

$$(8) \qquad q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\omega, q_{\omega+1}, \ldots, q_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

ne contient aucun sous-ensemble dénombrable dense en E. En effet, admettons que D est un sous-ensemble dénombrable de E, dense en E, et soient

$$(9) \qquad q_{\mu_1}, q_{\mu_2}, q_{\mu_3}, \ldots$$

les éléments de la suite (8) constituant D. Les nombres ordinaux μ_n $(n=1,2,3,\ldots)$ étant tous $<\Omega$, il existe, comme on sait, un nombre ordinal $\mu<\Omega$ supérieur à tous les μ_n $(n=1,2,3,\ldots)$. D'après la propriété de D, l'élément q_μ (n'appartenant à D, comme ayant un indice supérieur à ces des éléments de D) est limite d'une suite tirée de (9), donc d'une suite q_{α_n}, où $\alpha_n<\mu$ $(n=1,2,3,\ldots)$, contrairement à la propriété de la suite (8) démontrée plus haut.

Nous avons donc démontré que la propriété V entraîne la propriété IV.

L'équivalence des propriétés IV et V est ainsi établie.

5. Nous allons maintenant à démontrer l'existence d'une classe $(\mathfrak{L})$ jouissant de la propriété IV, mais non de la propriété III.

Soit

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad (\alpha<\Omega) \tag{10}$$

une suite transfinie de nombres réels différents, du type Ω. Nous définirons une classe $(\mathfrak{L})$ [1]) contenante les éléments

$$x_1^*, x_2^*, x_3^* \ldots, x_\omega^*, x_{\omega+1}^*, \ldots, x_\alpha^*, \ldots \qquad (\alpha<\Omega) \tag{11}$$

par des conventions suivantes. Nous dirons qu'une suite $x_{\alpha_1}^*, x_{\alpha}^*, x_{\alpha_3}^*, \ldots$ a une limite x_α^* dans ces et seulement dans ces cas si $\alpha_n=\alpha$ pour $n=1,2,3,\ldots$, ou bien si l'on a simultanément

$$\lim_{n=\infty} x_{\alpha_n}=x_\alpha, \quad \text{et} \quad \alpha_n<\alpha \quad \text{pour } n=1,2,3,\ldots$$

Je dis que notre classe jouit de la propriété V. Soit en effet, E un ensemble non dénombrable donné (évidemment de puissance $\aleph_1$) tiré de la classe considérée, et soient

$$z_1^*, z_2^*, z_3^*, \ldots, z_\omega^*, z_{\omega+1}^*, \ldots, z_\alpha^*, \ldots \qquad (\alpha<\Omega) \tag{12}$$

les termes successifs de (11) appartenant à E. L'ensemble G des nombres réels

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\omega, z_{\omega+1}, \ldots, z_\alpha, \ldots \qquad (\alpha<\Omega) \tag{13}$$

contient un sous-ensemble dénombrable, dense dans G, soit

$$z_{\mu_1}, z_{\mu_2}, z_{\mu_3}, \ldots \tag{14}$$

[1]) On pourrait même démontrer sans peine que ce sera une classe $(\mathcal{S})$.

Il existe, comme nous savons, un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que

(15) $$\mu > \mu_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Je dis que l'ensemble D (évidemment dénombrable) de tous les éléments

$$z_\alpha^* \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant \mu$$

est dense dans l'ensemble E.

En effet, soit z_ν^* un élément donné de E: il suffira évidemment de considérer le cas où $\nu > \mu$. L'ensemble (14) étant dense dans G, il existe une suite infinie tirée de (14), soit

$$z_{\mu_{n_1}}, z_{\mu_{n_2}}, z_{\mu_{n_3}}$$

convergente vers z_ν Or, d'après (15), ν étant $> \mu$, nous avons

$$\mu_{n_k} < \nu \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

par conséquent (d après les conventions sur la convergence dans notre classe) la suite $z_{\mu_{n_k}}^*$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ converge vers z_ν^* et (d'après (15)) ces termes sont éléments de D.

Tout élément z_ν^*, où $\nu > \mu$, c'est-à-dire tout élément de $E - D$, est donc élément limite de D. Nous avons donc démontré que D est dense dans E. Notre classe jouit ainsi de la propriété V, donc aussi de la propriété IV, comme équivalente à V (§ 4).

Or je dis que notre classe ne contient aucun élément de condensation. En effet, soit x_ν^* un élément donné de notre classe. Si l'on supprime de (11) l'ensemble au plus dénombrable de tous les éléments x_α^* où $\alpha < \nu$, il restera un ensemble duquel x_ν^* ne sera pas élément limite, d'après les conventions sur la convergence des suites dans notre classe. Donc x_ν^* n'est pas élément de condensation d'ensemble de tous les éléments de notre classe. Il en résulte qu aucun ensemble tiré de notre classe ne donne lieu à un élément de condensation. Notre classe ne jouit pas donc de la propriété I, ni de la propriété III, comme équivalente à I.

Nous avons donc démontré que la propriété IV, n'entraîne pas la propriété III.

Remarquons qu'il résulte sans peine de la propriété IV que tout ensemble isolé de la classe considérée est au plus dénombrable: nous avons donc en même temps un exemple d'une classe $(\mathcal{S})$ dans laquelle tout ensemble isolé est au plus dénombrable, mais qui ne donne lieu à aucun élément de condensation.

6. Définissons maintenant une autre classe ($\mathfrak{L}$), en modifiant les conventions sur la convergence dans l'ensemble (11) comme il suit. Nous conviendrons qu'une suite x^*_{α} ($n=1,2,3,\ldots$) a une limite x^*_{α}, si $\alpha_n=\alpha$ pour $n=1,2,3,\ldots$ ou bien si l'on a simultanément

$$\lim_{n=\infty} x_{\alpha_n}=x_\alpha \quad \text{et} \quad \alpha_n>\alpha \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\ldots{}^{1)}$$

Je dis qu'une telle classe jouit de la propriété I. En effet, soit E un ensemble non dénombrable donné d'éléments de notre classe, G — l'ensemble de nombre réels correspondant. L'ensemble de nombres réels G, comme non dénombrable, contient un point de condensation, soit x_μ. Je dis que x^*_μ sera un élément de condensation de E. En effet, soit D un sous-ensemble dénombrable de E, H — un sous-ensemble correspondant de G. Si l'on supprime de G l'ensemble au plus dénombrable de tous les termes de la suite (10) précédents x_ν et l'ensemble dénombrable H, x_ν, comme point de condensation de G, sera encore point limite de l'ensemble qui restera, donc limite d'une suite x_{α_n} d'éléments de $G-H$ telle que $\alpha_n>\nu$ pour $n=1,2,3,\ldots$ Par conséquent (d'après les conventions sur la convergence dans notre classe) x^*_ν sera limite de la suite correspondante $x^*_{\alpha_n}$ d'éléments de $E-D$. Donc x^*_ν est elément limite de tout ensemble obtenu en supprimant de E une infinité dénombrable d'éléments: c'est donc un élément de condensation de E. Notre classe jouit donc de la propriété I, donc aussi de la propriété III (comme équivalente à I).

Or, je dis que notre classe ne jouit pas de la propriété V, même qu'elle n'est pas *séparable* au sens de M. Fréchet[2]). En effet, supposons que notre classe contient un ensemble dénombrable D tel que tout élément de cette classe est un élément ou un élément limite de D. Soient

$$(16) \qquad x^*_{\mu_1},\ x^*_{\mu_2},\ x^*_{\mu_3},\ldots$$

les éléments constituant D, et soit $\mu<\Omega$ un nombre ordinal $>\mu_n$ ($n=1,2,3,\ldots$). D'après la propriété de D, l'élément x^*_μ est

[1]) On voit sans peine que notre classe sera une classe ($\mathcal{S}$).

[2]) M. Fréchet, Thèse, § 37.

limite d'une suite tirée de (16), ce qui est impossible, d'après les conventions sur la convergence dans notre classe. Cette dernière ne jouit pas donc de la propriété V, ni de la propriété IV (comme équivalente à V).

Nous avons donc démontré que la propriété III n'entraîne pas la propriété IV.

Les propriétés III et IV sont donc indépendantes l'une de l'autre (même pour les classes $(\mathcal{S})$).

Correction. Dans les §§ 3 et 4 de la Note précédente je m'appuyai sur la proposition, considérée comme évidente, qu'en ajoutant à un ensemble tous ses éléments limites on obtient toujours un ensemble fermé. Or cette proposition n'est vraie que pour les classes $(\mathcal{S})$ (c'est-à-dire les classes où tout ensemble dérivé est fermé): *notre démonstration n'est donc valable que pour les classes* $(\mathcal{S})$

Or les propriétés I et II sont équivalentes pour les classes $(\mathcal{L})$ quelconques. La démonstration du § 1 (que I entraîne II) s'appliquant aux classes $(\mathcal{L})$ quelconques, il suffira de prouver que II entraîne I, ce qu'on peut achever en modifiant le raisonnement du § 3 (p. 182). Il suffit évidemment de démontrer que l'ensemble (4) est clairsemé. Soit donc G un sous-ensemble de l'ensemble (4) et q_μ le premier élément de la suite (4) appartenant à G; G sera évidemment contenu dans Q_μ. Or q_μ est un élément isolé de Q_μ, donc aussi de G. Donc aucun sous-ensemble de (4) n'est dense en soi, c. q. f. d.

Quant à notre démonstration que I entraîne III, (§ 2), elle s'applique aux classes $(\mathcal{L})$ quelconques; de même la démonstration que V entraîne IV (§ 4). Or M. Kuratowski a trouvé récemment un exemple d'une classe $(\mathcal{L})$ jouissant des propriétés III et IV mais ne jouissant pas des propriétés I et V. Cet exemple sera publié dans le tome III de ce journal.
