Le théorème de Borel-Lebesgue dans la théorie des ensembles abstraits.

Par

C. Kuratowski et W. Sierpiński (Varsovie).

Introduction. — A la fin de sa Note „Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits“ [1]) M. Fréchet fait la remarque suivante:

„Il serait intéressant de déterminer — comme nous l'avons fait pour le théorème de Borel — quelle est la classe la plus générale où l'on peut énoncer le théorème de Borel-Lebesgue. Une telle classe est au moins une classe ($\mathcal{S}$), mais elle n'est pas nécessairement une classe ($\mathcal{V}$), comme on en peut facilement fournir des exemples“.

Le but de la présente Note est de résoudre la question posée ainsi par M. Fréchet. Nous donnerons aussi une résolution d'un problème analogue concernant le théorème de Borel-Lebesgue généralisé (pour les ensembles quelconques).

Pour éviter d'avoir à renvoyer à la Note de M. Fréchet, nous rappelons que le théorème de Borel-Lebesgue s'énonce pour une classe ($\mathcal{L}$) (c'est-à-dire une classe où la limite est définie) comme suit:

Soit E un ensemble compact [2]) et fermé d'éléments de la classe considérée. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles I d'éléments de cette

[1]) *Bull. de la Soc. math de France*, t. XLV (1917), p. 1–8. A cause des évennements de la guerre ce volume du Bulletin a été reçu à Varsovie il n'y a que quelques semaines.

[2]) Un ensemble E est *compact* si tout sous-ensemble infini de E donne lieu à un élément limite.

classe, famille telle que tout élément de E est intérieur à l'un des ensembles I. Alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}_1$ jouissant de la même propriété et constituée seulement par un nombre fini d'ensembles I.

1. Nous introduirons d'abord une notion qui par elle-même peut présenter quelque intêret pour la théorie des ensembles abstraits.

Appelons *entourage* d'un élément p d'une classe $(\mathcal{L})$ tout ensemble d'éléments de cette classe auquel p est intérieur (c'est-à-dire n'est pas limite d'une suite d'éléments de la classe n'appartenant pas à cet ensemble).

Soit E un ensemble donné appartenant à une classe $(\mathcal{L})$. Nous dirons qu'un élément p de cette classe est *de puissance* $\mathfrak{m}$ relativement à E, si tout entourage de p contient à son intérieur un sous-ensemble de E de puissance $\mathfrak{m}$, mais non tout entourage de p contient à son intérieur un sous ensemble de E de puissance $> \mathfrak{m}$ [1]).

On voit sans peine que tout élément de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ relativement à un ensemble E est un élément limite de E [2]). En effet, si p n'est pas élément limite de E, p est évidemment intérieur à l'ensemble G, formé de p et de tous les éléments de la classe considérée qui n'appartiennent pas à E. L'ensemble G serait ainsi un entourage de p ne contenant aucun élément de E différent de p, et par conséquent, p ne pourrait être un élément de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ relativement à E.

2. *Théorème.* Pour que le théorème de Borel-Lebesgue s'applique à une classe $(\mathcal{L})$, il faut et il suffit que tout ensemble infini E d'élements de cette classe, qui est compact et dont l'ensemble dérivé est aussi compact, donne lieu à au moins un élément de puissance égale à celle de E relativement à E.

1) Cf. G. Cantor: *Acta Mathematica*, t. VII (1885) p. 118. Aussi: W. Sierpiński: *Fund. Math.* t. I, p. 28.

2) La réciproque n'est d'ailleurs vraie que si la classe considérée est une classe $(\mathcal{S})$. Dans ce cas tout élément limite d'un ensemble E d'éléments de cette classe est d'une puissance déterminée $\geqslant \aleph_0$ relativement à E (La démonstration utilise d'ailleurs le théorème de M. Zermelo).

On pourrait aussi démontrer que pour une classe $(\mathcal{S})$ tout élément de condensation d'un ensemble E d'éléments de cette classe est de puissance $\geqslant \aleph_1$ relativement à E. Or, pour une classe $(\mathcal{L})$ quelconque on peut affirmer seulement la réciproque.

Démonstration. Supposons que le théorème de Borel-Lebesgue est vrai pour une certaine classe ($\mathfrak{L}$) et soit E un ensemble infini compact d'éléments de cette classe dont le dérivé E' est aussi compact. Par conséquent, l'ensemble $E_1 = E + E'$ est compact. Comme l'a démontré M. Fréchet, la classe considérée (comme admettant le théorème de Borel [1]) est nécessairement une classe ($\mathfrak{S}$), c'est-à-dire, tous les ensembles dérivés des ensembles d'éléments de cette classe sont fermés. Par conséquent, l'ensemble E_1 est fermé. Donc, d'après l'hypothèse, le théorème de Borel-Lebesgue s'applique à l'ensemble E_1.

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ la puissance de l'ensemble E et admettons que E_1 ne contient aucun élément de puissance $\mathfrak{m}$ relativement à E. Il existe donc pour tout élément p de E_1 un entourage $I(p)$ dont l'intérieur contient moins que $\mathfrak{m}$ éléments de E. D'après le théorème de Borel-Lebesgue il existe donc une suite finie de ces entourages, soit

$$(1) \qquad I(p_1), I(p_2), \ldots, I(p_n)$$

telle que tout élément de E_1 et, à plus forte raison, tout élément de E est intérieur à un des ensembles (1). Or c'est impossible, puisque l'ensemble E est de puissance $\mathfrak{m}$ et chacun des ensembles (1) contient à son intérieur moins que $\mathfrak{m}$ éléments de E [2]. Donc E_1 contient au moins un élément de puissance $\mathfrak{m}$ relativement à E. La condition de notre théorème est ainsi nécessaire [3].

[1]) Nous rappelons qu'on obtient le théorème de Borel de celui de Borel-Lebesgue en admettant que la famille d'ensembles $\mathfrak{F}$ y considérée est dénombrable.

[2]) Nous nous appuyons ici évidemment sur le théorème qu'un ensemble infini E ne peut être jamais décomposé en un nombre fini d'ensembles de puissances inférieures à celle de E, théorème qui résulte de l'axiome de M. Zermelo.

[3]) Il est remarquable, qu'en supposant que la condition, exprimée dans notre théorème, concerne un ensemble compact E quelconque (sans faire de réstriction par rapport à son dérivé E'), on parvient à une condition qui n'est plus nécessaire. En effet, considérons l'ensemble des nombres de première et deuxième classe et admettons qu'une suite (simple), composée d'éléments différents l'un de l'autre, n'est convergente que lorsqu'elle contient une quantité finie ($\geqslant 0$) des nombres de deuxième espèce. On voit sans peine que le théorème de Borel-Lebesgue est vérifié, tandis que les nombres de première espèce forment un ensemble compact de puissance $\aleph_1$ qui ne donne lieu à aucun élément de cette puissance.

Cet exemple montre, en même temps, qu'il y a des classes ($\mathfrak{S}$) qui contiennent des ensembles compacts, dont les dérivés ne le sont pas.

Considérons maintenant une classe ($\mathfrak{L}$) satisfaisant aux conditions de notre théorème et supposons que le théorème de Borel-Lebesgue est inexact pour un ensemble compact et fermé E_0 d'éléments de cette classe. Il existe donc une famille $\mathcal{F}$ d'ensemble I d'éléments de notre classe, famille telle que tout élément de E_0 est intérieur à l'un des ensembles I, mais qu'on ne peut pas extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}_1$ jouissant de la même propriété et constituée seulement par un nombre fini d'ensembles I. Parmi les familles $\mathcal{F}$ d'ensembles satisfaisant à ces conditions il existe évidemment (d'après le théorème de M. Zermelo) au moins une, soit $\mathcal{F}_0$, dont la puissance est minimum, soit $\mathfrak{m}$. Soit Ω_0 le plus petit nombre transfini de puissance $\mathfrak{m}$. La famille $\mathcal{F}_0$ d'ensembles I ayant la puissance $\mathfrak{m}$, il résulte du théorème de M. Zermelo l'existence d'un ensemble bien ordonné du type Ω_0:

(2) $$I_1, I_2, I_3, \ldots, I_\omega, I_{\omega+1}, \ldots, I_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega_0)$$

formé de tous les ensembles I constituant $\mathcal{F}_0$. Or il s'ensuit tout de suite de la définition de $\mathcal{F}_0$ que tout élément de E_0 est intérieur à l'un des ensembles I de la suite transfinie (2), mais qu'aucun segment de cette suite ne jouit de cette propriété. Nous pouvons aussi supposer que pour tout $\alpha < \Omega_0$ l'ensemble I_α contient à son intérieur au moins un élément de E_0, soit p_α, qui n'est intérieur à aucun ensemble I_ξ pour $\xi < \alpha$, puisque tous les ensembles I_α, qui ne jouissent pas de cette propriété, pourraient être supprimés dans la suite (2), sans en diminuer le type ordinal ($\mathcal{F}$ étant une famille de puissance minimum satisfaisant aux conditions dont nous avons parlé plus haut). L'ensemble E de tous les éléments p_α $(\alpha < \Omega_0)$ est évidemment de puissance $\mathfrak{m}$ (puisque $p_\alpha \neq p_\beta$ pour $\alpha < \beta$, p_α étant intérieur à I_α et p_β ne l'étant pas). Or E est un sous-ensemble de l'ensemble fermé E_0, donc aussi E'. L'ensemble E_0 étant compact, ses sous-ensembles E et E' le seront aussi: d'après la propriété de la classe considérée, E admet donc un élément de puissance $\mathfrak{m}$ relativement à E, soit q. Or q étant, à plus forte raison, élément limite de E_0, et E_0 étant fermé, q appartient à E_0, donc est intérieur à l'un au moins d'ensembles (2), soit à I_μ. L'élément q, intérieur à I_μ, étant de puissance $\mathfrak{m}$ relativement à E, I_μ contient à son intérieur un sous-ensemble de E de puissance $\mathfrak{m}$. Or, l'ensemble de tous les éléments p_ξ pour $\xi \leqslant \mu$ ayant évidemment une puissance inférieure à $\mathfrak{m}$ (d'après la propriété du nombre Ω_0), nous en concluons que I_μ contient à son intérieur un élément p_ν de E, dont l'indice ν est $> \mu$, ce qui est impossible d'après la définition de p_ν. L'hypothèse que le théorème de Borel-Lebesgue est inexact pour notre classe, implique donc une contradiction. La condition de notre théorème est ainsi suffisante.

Notre théorème est donc démontré complètement.

Observons qu'en combinant notre théorème avec les résultats obtenus par M. Fréchet, nous arrivons aux propositions suivantes:

1) Toute classe ($\mathcal{L}$) satisfaisant aux conditions de notre théorème est une classe ($\mathcal{S}$) [1].

2) Toute classe ($\mathcal{D}$) satisfait aux conditions de notre théorème [2].

3. Par le théorème de Borel-Lebesgue généralisé [3]) nous comprendrons le théorème suivant.

Soit E un ensemble quelconque d'éléments d'une classe donnée. Soit $\mathcal{F}$ une famille infinie d'ensembles I d'éléments de cette classe, famille telle que tout élément de E est intérieur à l'un des ensembles I. Alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}_1$ jouissant de la même propriété et constituée seulement par une infinité dénombrable d'ensembles I [4].

Nous déterminerons la classe la plus générale où l'on peut énoncer le théorème de Borel-Lebesgue généralisé.

Théorème. Pour que le théorème de Borel-Lebesgue généralisé s'applique pour une classe ($\mathcal{L}$), il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée:

(3) tout ensemble non dénombrable E d'éléments de cette classe contient au moins un élément de puissance non dénombrable relativement à E.

Démonstration. Supposons que le théorème de Borel-Lebesgue généralisé soit vrai pour une certaine classe ($\mathcal{L}$) et soit E un ensemble non dénombrable d'éléments de cette classe. Admettons que

[1]) La réciproque n'est pas vraie; exemple: l'ensemble de tous les nombres transfinis de la deuxième classe.

[2]) La réciproque n'est pas vraie; exemple: le type (ordonné linéairement) ξ^2, où ξ désigne le type de tous les nombres réels d'intervalle (0,1) (ordonné d'après la grandeur).

[3]) Cf. E. Lindelöf: *C. R.* t. 137 p. 697.

[4]) Ce théorème implique évidemment celui de Borel-Lebesgue par rapport à toute classe ($\mathcal{S}$); la réciproque n'est pas vrai, comme on voit immédiatement en examinant l'ensemble ordonné du type ξ^2, mentionné tout à l'heure.

E ne contient aucun élément de puissance non dénombrable relativement à E. Il existe donc pour tout élément de E un entourage $I(p)$ dont l'intérieur contient un ensemble au plus dénombrable d'éléments de E. D'après le théorème de Borel-Lebesgue généralisé il existe donc une suite dénombrable de ces entourages, soit

$$(1) \qquad I(p_1), I(p_2). I(p_3), \dots$$

telle que tout élément de E est intérieur à un des ensembles (4). Or c'est impossible, puisque l'ensemble E est non dénombrable et chacun d'ensembles (4) contient à son intérieur un sous-ensemble au plus dénombrable de E. Donc E contient nécessairement au moins un élément de puissance non dénombrable relativement à E. La condition de notre théorème est ainsi nécessaire.

Considérons maintenant une classe $(\mathcal{L})$ telle que tout ensemble non dénombrable E d'éléments de cette classe contient au moins un élément de puissance non dénombrable relativement à E et supposons que le théorème de Borel-Lebesgue généralisé est inexact pour un ensemble E_0 d'éléments de cette classe (E_0 sera nécessairement non dénombrable, puisque le théorème de Borel Lebesgue généralisé est évidemment vrai pour les ensembles au plus dénombrables). Il existe donc une famille (non dénombrable) $\mathcal{F}_0$ d'ensembles I d'éléments de la classe considérée, famille telle que tout élément de E_0 est intérieur à l'un des ensembles I, mais qu'on ne peut pas extraire de $\mathcal{F}_0$ une famille au plus dénombrable, jouissant de la même propriété. Soit

$$(5) \qquad I_1, I_2, I_3, \dots, I_\omega, I_{\omega+1}, \dots I_\alpha, \dots$$

un ensemble bien ordonné, formé de tous les ensembles I constituant $\mathcal{F}_0$. Supposons dans la suite transfinie (5) supprimés les ensembles I_α ne contenant à son intérieur aucun élément de E_0 non intérieur à aucun ensemble I_ξ pour $\xi < \alpha$. Cela peut, peut être, changer le type ordinal de la suite (5), mais elle restera toutefois non dénombrable (donc du type $\geqslant \Omega$, Ω désignant le plus petit nombre transfini de la troisième classe), puisque, d'après l'hypothèse, le théorème de Borel Lebesgue généralisé est inexact pour E_0 et $\mathcal{F}_0$. Donc, les ensembles I_α existent pour $\alpha < \Omega$ et I_α contient à son intérieur au moins un élément de E_0, soit p_α, qui n'est intérieur à aucun ensemble I_ξ pour $\xi < \alpha$. Soit E l'ensemble de tous les éléments p_α $(\alpha < \Omega)$: on voit sans peine que ce sera un ensemble non dénombrable (de puissance $\aleph_1$): d'après la propriété de la classe considérée, E contiendra donc au moins un élément de puissance non dénombrable relativement à E, soit p_μ. L'ensemble I_μ, auquel p_μ est intérieur, contient donc à son intérieur une infinité non dénombrable d'éléments de E. L'ensemble de tous les éléments p_ξ où $\xi \leqslant \mu$ étant au plus dénombrable (puisque $\mu < \Omega$), il en résulte que I_μ contient à son intérieur au moins un élément p_ν, où $\nu > \mu$, ce qui est impossible, d'apres la définition de l'élément p_ν. L'hypothèse que le théorème de Borel-Lebesgue généralisé ne s'applique pas pour notre classe, implique donc une contradition. La condition de notre théorème est ainsi suffisante.

Notre théorème est ainsi démontré.

4. Envisageons la condition suivante:

(6) tout ensemble infini E d'éléments (d'une classe donné $(\mathfrak{L})$), qui n'est pas une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est de puissance inférieure à celle de E, contient au moins un élément de puissance égale à celle de E relativement à E.

Cette condition implique la condition (3). En effet, tout ensemble non dénombrable E contient un sous-ensemble P de puissance $\aleph_1$; celui-ci contient — en vertu de (6) — un élément p de puissance $\aleph_1$ donc un élément de puissance non dénombrable de P; à plus forte raison, p est un élément de puissance non dénombrable de E, — ce qui prouve que la condition (3) est vérifiée.

D'autre part, en suivant une voie tout à fait analogue à celle que nous avons utilisée pour établir que le théorème de Borel-Lebesgue généralisé implique la condition (3), on montre qu'il implique également la condition (6). Nous arrivons ainsi au

Corollaire: Les propositions suivantes sont équivalentes pour toute classe $(\mathfrak{L})$:

1° condition (3),

2° condition (6),

3° théorème de Borel-Lebesgue généralisé.

De nos théorèmes résultent plusieurs conséquences intéressantes auxquelles nous reviendrons ailleurs.