Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Les considérations qui sont exposées dans cette Note suivent la voie des idées des MM. Hessenberg[1]) et Hartogs[2]) sur la méthode d'introduction de la notion d'ordre dans la Théorie des Ensembles.

Cette méthode peut être resumée, comme suit.

Soit M un ensemble quelconque; convenons de dire que la classe[3]) $\mathbf{M}$ *„établit un ordre"* dans l'ensemble M lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes:

(1) les éléments de la classe $\mathbf{M}$ sont des sous-ensembles de M;

(2) X et Y étant des éléments quelconques de $\mathbf{M}$ on a:

$$X \subset Y \quad \text{ou bien} \quad Y \subset X;$$

[1]) *Grundbegriffe der Mengenlehre.* Abhandlungen der Fries'schen Schule I, 4, Göttingen 1906, p. 674—685 („Vollständige ordnende Systeme").

Dans une note publiée à la même époque (*Sur les éléments de la théorie des ensembles ordonnés*, Enseignement Mathématique VIII, 1906 Mai—Juin, p. 201) M. Combébiac a exprimé sur la théorie de l'ordre des idées bien analogues à celles de M. Hessenberg.

[2]) *Ueber das Problem der Wohlordnung.* Anhang. Mathematische Annalen 76, 1914, p. 443.

[3]) Pour la commodité du langage nous ferons usage du terme „classe" lorsqu'il sera question des ensembles, dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles par hypothèse; nous désignons les classes par $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$... Leurs éléments-ensembles par A, B...; les éléments de ces derniers par a, b...

$$a \varepsilon A$$

signifie, comme d'habitude que a est un élément de A;

$$A \subset B$$

signifie que A est un sous-ensemble de B, que A est contenu dans B.

(3) x et y étant deux éléments différents de M, il existe un ensemble-élément de $\boldsymbol{M}$ qui en contient un sans en contenir l'autre;

(4) X étant une sous-classe de $\boldsymbol{M}$, la somme de tous les ensembles qui sont les éléments de X, est un élément de $\boldsymbol{M}$;

(5) il en est de même du produit de ces ensembles.

On démontre, que lorsque $\boldsymbol{M}$ remplit les conditions 1—5 et lorsqu'on pose

$$x < y$$

quand il existe un élement Y de $\boldsymbol{M}$ dont y est un élément et x ne l'est pas, — l'ensemble M est *ordonné* au sens habituel du mot. D'autre part, lorsqu'on suppose que l'ensemble M est ordonné d'une certaine façon, la classe de tous ses restes [1]) vérifie les conditions 1—5; elle est d'ailleurs la seule [2]) qui les vérifie en l'ordonnant de cette façon. Donc, il existe une correspondance biunivoque entre les façons d'ordonner un ensemble donné et les classes qui y „établissent un ordre".

Ainsi, la théorie des c l a s s e s q u i é t a b l i s s e n t u n o r d r e peut être regardée comme équivalente à la théorie classique des ensembles ordonnés, basée sur la notion intuitive d'ordre (C a n t o r). En même temps, on peut la déduire de la théorie générale des

[1]) On appelle „reste" d'un ensemble ordonné tout ensemble qui jouit de la propriété suivante: lorsque x est son élément, tout élément précédé par x l'est aussi. (H e s s e n b e r g, l. c. p. 541).

[2]) M. H a r t o g s affirme, que M étant un ensemble ordonné d'une certaine façon et $\boldsymbol{M}$ une classe l'ordonnant ainsi et ne satisfaisant qu'aux conditions 1—4, — $\boldsymbol{M}$ est identique à la classe de tous les restes de M (p. 443, lignes: 12—15).

Ceci est inexact. En effet, soit M l'ensemble de tous les x satisfaisant à l'inégalité: $0 \leqslant x \leqslant 1$; envisageons la classe S de tous les segments contenus dans M et contenant le point 1; soit $\boldsymbol{M}_1$ la classe de tous les ensembles de points qu'on obtient de ces segments en y supprimant les bornes inférieures. On voit immédiatement que $\boldsymbol{M}_1$ satisfait aux conditions 1—4. Soit, d'autre part, $\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_1 + S$; cette classe vérifie aussi les conditions 1—4 et ordonne M de la même façon. Par conséquent, quelle que soit la définition du terme „reste", une au moins de ces deux classes: $\boldsymbol{M}_1$ ou $\boldsymbol{M}_2$, n'est pas la classe de tous les restes de l'ensemble M, — contrairement à l'assertion de M. H a r t o g s.

Dans cet exemple d e u x „o r d r e s" d i f f é r e n t s (au sens de M. Hartogs) $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ ordonnent d'u n e s e u l e f a ç o n l'ensemble M. Cet inconvénient — comme nous l'avons dit — est étranger à la définition de M. H e s s e n b e r g; il en est de même, lorsqu'il s'agit de la définition que je propose plus loin.

ensembles (non ordonnés) sans qu'il y faille introduire aucune notion première supplémentaire: l'idée de l'ordre y est donnée en termes fondamentaux du système des axiomes de M. Zermelo [1]), à savoir, celui d'ensemble et celui d'élément [2]). L'importance de cette méthode est manifeste.

Nous donnons dans cette note une autre définition de l'ordre, qui nous semble bien naturelle et qui équivaut à celle de M. Hessenberg; en outre, nous envisageons la notion de l'ensemble bien ordonné et celle de la suite; les considérations sur la suite finie sont intimement liées à la définition de l'ensemble fini, qui a été proposée dans le volume précédent des „Fundamenta" [3]).

Selon la terminologie de Janiszewski [4]) un ensemble est dit *saturé* par rapport à une propriété donnée s'il la possède lui même et s'il n'est un vrai sous-ensemble d'aucun ensemble, qui la possède. D'une façon analogue, un ensemble est dit irréductible par rapport à une propriété, s'il la possède et si aucun de ses sous-ensembles ne la possède pas.

Ces deux notions ont une grande importance pour plusieurs théories mathématiques. Nous en ferons usage dans cette note.

Convenons de dire, que $\mathfrak{M}$ est une *„classe d'ensembles décroissants"* (ou croissants) lorsqu'il est vrai de tous deux éléments X et Y de $\mathfrak{M}$, que

$$X \subset Y \quad \text{ou bien} \quad Y \subset X.$$

En se basant sur cette définition et sur celle de l'ensemble saturé nous introduisons la notion de l'ordre à l'aide de la définition suivante [5]).

[1]) *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre,* Math. Ann. 65, 1908.

[2]) Une définition d'ensemble ordonné, donnée en termes d'ensemble et d'élément, mais basée sur une idée tout à fait différente, a été publiée par M. Hausdorff dans ses *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig 1914); voir aussi Kuratowski *Sur la définition de la grandeur* („O definicji wielkości", Przegląd Filozoficzny, Varsovie, 1917).

[3]) Kuratowski *Sur la notion de l'ensemble fini* Varsovie 1920.

[4]) Janiszewski *Sur les continus irréductibles entre deux points*, p. 7, Paris 1911 (Thèse).

[5]) Il n'est question que des ensembles non vides.

Définition I. La classe $\mathfrak{M}$ *ordonne l'ensemble* M, lorsqu'elle est saturée par rapport à la propriété d'être une classe de sous-ensembles décroissants de M.

On voit immédiatement que la définition I s'obtient de celle de M. Hessenberg en y remplaçant les conditions 3, 4 et 5 par la condition:

(6) $\mathfrak{M}$ n'est pas une vraie sous-classe d'aucune classe satisfaisant aux conditions 1 et 2.

Nous allons montrer, que cette définition donne une conception de l'ordre qui équivaut à celle de la théorie classique des ensembles ordonnés.

Démonstration.

1. Supposons que la classe $\mathfrak{M}$ satisfait aux conditions 1, 2 et 6 et posons

$$x < y,$$

lorsque x et y appartiennent à M et lorsqu'il existe dans $\mathfrak{M}$ un élément Y tel, que

$$y \,\varepsilon\, Y \quad \text{et} \quad x \text{ non-}\varepsilon\, Y.$$

La relation „$<$" ordonne l'ensemble M, c'est à dire, qu'elle vérifie les conditions suivantes:

(α) elle est transitive,

(β) elle est asymmétrique,

(γ) elle subsiste entre tous deux éléments de M.

En effet, soit $x < y$ et $y < z$; il existe donc deux ensembles Y et Z, éléments de $\mathfrak{M}$, tels que

$$y \,\varepsilon\, Y, \quad x \text{ non-}\varepsilon\, Y$$
$$z \,\varepsilon\, Z, \quad y \text{ non-}\varepsilon\, Z.$$

Par conséquent, Y n'est pas contenu dans Z; comme, d'autre part, $\mathfrak{M}$ est une classe d'ensembles décroissants, il en résulte, que Z est contenu dans Y. Donc,

$$z \,\varepsilon\, Z \quad \text{et} \quad x \text{ non-}\varepsilon\, Z,$$

ce qui prouve que $x < z$. Ainsi, la condition (α) est remplie.

Comme la démonstration de (β) est immédiate, nous passons à celle de (γ).

Soient a et b deux éléments différents de M et supposons, que tout élément X de $\mathfrak{M}$, contenant a, contient en même temps b, comme élément; pour établir la condition (γ) il suffit de montrer qu'il existe dans $\mathfrak{M}$ un élément B tel que

$$b \,\varepsilon\, B \quad \text{et} \quad a \; non\text{-}\varepsilon\, B.$$

Désignons par P le produit (la partie commune) de tous les ensembles appartenant à $\mathfrak{M}$ et admettant a comme élément; de tels ensembles existent, car en vertu de la condition 6, M est en tout cas un élément de $\mathfrak{M}$. Soit B l'ensemble qu'on obtient de P en y supprimant l'élément a. Je dis, que B appartient à $\mathfrak{M}$.

Soit X un élément quelconque de $\mathfrak{M}$. Deux cas peuvent se présenter:

1° $a \,\varepsilon\, X$; donc, $P \subset X$, d'où:

$$B \subset X.$$

2° $a \; non\text{-}\varepsilon\, X$; donc, aucun ensemble contenant a n'est pas contenu dans X, et — en vertu de la cond. 2 — X est contenu dans chacun d'eux; il en résulte que $X \subset P$; or, B ne diffère de P que par l'élément a et, par suite,

$$X \subset B.$$

Il est donc vrai de tout X appartenant à $\mathfrak{M}$, que

$$B \subset X \quad \text{ou bien} \quad X \subset B;$$

c'est à dire: la classe, admettant comme éléments l'ensemble B et tous les éléments de la classe $\mathfrak{M}$, est une classe d'ensembles décroissants. Par conséquent, pour que la classe $\mathfrak{M}$ soit saturée (cond. 6), il faut bien que B soit son élément.

Nous avons ainsi montré qu'il existe dans $\mathfrak{M}$ un ensemble B tel que

$$b \,\varepsilon\, B \quad \text{et} \quad a \; non\text{-}\varepsilon\, B,$$

ce qui prouve que la condition (γ) est aussi vérifiée.

Donc, si une classe $\mathfrak{M}$ *ordonne* l'ensemble M au sens donné par notre définition, la relation „$<$“, correspondante à cette classe, ordonne l'ensemble M au sens ordinaire.

2. Le théorème réciproque est également vrai.

Admettons, en effet, que la relation ϱ vérifie les conditions (α)—(γ) par rapport à tous les éléments de M. Soit $\mathfrak{M}$ la classe de tous les restes, qui correspondent à cette relation. $\boldsymbol{M}$ est évidemment une classe des sous-ensembles décroissants de M. Nous montrerons, qu'elle est saturée par rapport à cette propriété.

Supposons, qu'il n'en est pas ainsi. Il existerait donc un tel sous-ensemble E de M, qui n'en serait pas un reste et qui vérifierait pour tout reste X la formule:

$$X \subset E \quad \text{ou bien} \quad E \subset X.$$

E n'étant pas un reste de M, il existe dans M deux éléments a et b qui satisfont aux conditions:

$$a \,\varepsilon\, E, \quad a \,\varrho\, b, \quad b \text{ non-}\varepsilon\, E.$$

Désignons par R l'ensemble de tous les x, pour lesquels on a: $a \,\varrho\, x$; R est bien un reste de M; d'autre part,

$$a \,\varepsilon\, E \quad \text{et} \quad a \text{ non-}\varepsilon\, R,$$

tandis que

$$b \,\varepsilon\, R \quad \text{et} \quad b \text{ non-}\varepsilon\, E.$$

Donc, ni E n'est contenu dans R, ni R dans E — contrairement à l'hypothèse.

Il en résulte que $\boldsymbol{M}$ est une classe saturée (cond. 6).

Nous avons ainsi montré, que la classe $\boldsymbol{M}$ de tous les restes de M *établit un ordre* dans M (au sens de la définition I) et que cet ordre est bien identique à celui qui y établit la relation ϱ.

C. Q. F. D.

Nous allons montrer à présent que $\boldsymbol{M}$ est l'unique classe, qui y établit cet ordre.

Supposons à ce but, que la classe $\boldsymbol{N}$ jouit de la même propriété. Je dis, que tout élément de $\boldsymbol{N}$ est un reste de M. Soit, en effet, A un élément quelconque de $\boldsymbol{N}$ et a un élément de A. Soit x un élément quelconque, qui satisfait à la formule: $a \,\varrho\, x$; il s'agit de montrer que $x \,\varepsilon\, A$. Supposons le contraire; alors,

$$a \,\varepsilon\, A \quad \text{et} \quad x \text{ non-}\varepsilon\, A,$$

ce qui prouve, que x précède a, c'est à dire: $x \,\varrho\, a$, — contrairement à (β).

Donc, $x \,\varepsilon\, A$ et, par suite, A est un reste de M. Cette conclusion peut s'écrire:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{M}.$$

Comme, d'autre part, $\mathfrak{N}$ est saturée (cond. 6), — on en déduit l'identité

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}.$$

Nous avons ainsi mis en évidence la correspodance biunivoque entre les classes qui „établissent l'ordre" dans un ensemble donné et les diverses façons d'ordonner cet ensemble.

Passons maintenant aux ensembles bien ordonnés.

Convenons de dire, que $\mathfrak{M}$ est une „*classe bien ordonnée des ensembles décroissants*", lorsque

(7) toute sous-classe $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{M}$ contient un tel élément que tous les autres en sont des sous-ensembles.

D'une façon analogue, on établit le sens du terme „classe bien ordonnée des ensembles croissants".

Définition II. La classe $\mathfrak{M}$ *établit un bon ordre* dans l'ensemble M, lorsqu'elle est saturée par rapport à la propriété d'être une „classe bien ordonnée des sous-ensembles décroissants" de M.

Cela signifie, que la classe $\mathfrak{M}$ vérifie les conditions 1, 7 et la condition:

(8) $\mathfrak{M}$ n'est pas une vraie sous-classe d'aucune classe satisfaisante aux conditions 1 et 7.

Envisageons une classe $\mathfrak{M}$ qui vérifie les conditions 1, 7 et 8. Nous montrerons, qu'elle satisfait aussi aux cond. 2 et 6.

Quant à la cond. 2, il est intéressant de voir que déjà la cond. 7 seule l'implique. En effet, soit X et Y deux éléments quelconques de $\mathfrak{M}$ et soit $\mathfrak{K}$ la classe composée de ces deux éléments. Selon (7) un d'eux est le plus grand élément de cette classe; suivant que c'est X ou Y on a:

$$Y \subset X \quad \text{ou bien} \quad X \subset Y;$$

ce qui veut dire, que la condition 2 est vérifiée [1]).

La classe $\mathfrak{M}$ est saturée par rapport aux cond. 1 et 2. En effet, supposons, qu'on puisse ajouter à la classe $\mathfrak{M}$ un élément E, ne lui appartenant pas, sans que la classe $\mathfrak{N}$, ainsi obtenue, cesse vérifier les cond. 1 et 2; $\mathfrak{N}$ vérifierait évidemment aussi la condi-

[1]) Ce raisonnement est dû à M. Saks.

tion 7, — contrairement à l'hypothèse que $\mathfrak{M}$ est saturée (condition 8).

Donc, la classe $\mathfrak{M}$ satisfait aux conditions 2 et 6 et elle établit un ordre dans l'ensemble M au sens de la définition I. Nous allons voir que cet ordre est un b o n ordre.

Soit A un sous-ensemble quelconque de M et $\mathfrak{A}$ la classe des sous-ensembles de A tels que pour chacun d'eux existe au moins un élément de A qui lui appartient, et au moins un qui ne lui appartient pas. Soit S le plus grand de ces ensembles. S contient tous les éléments de A, excepté un seul. En effet, supposons que deux éléments a et b de A n'appartiennent pas à S et que $a < b$; il existerait donc un ensemble B tel que

$$b \,\varepsilon\, B \quad \text{et} \quad a \; non\text{-}\varepsilon\, B;$$

or, selon la définition de S, $B \subset S$; donc $b \,\varepsilon\, S$, ce qui est impossible.

Il en résulte, que l'élément de A, qui n'appartient pas à S, précède tous les autres éléments de A; en d'autres termes: l'ensemble M est b i e n o r d o n n é au sens ordinaire.

D'autre part M étant bien ordonné, la classe de tous ses restes est évidemment une „classe bien ordonnée des sous ensembles décroissants de M“ et elle est s a t u r é e par rapport à cette propriété.

Ainsi, l'emploi de la définition II est complètement justifié.

Définition III. Le bon ordre établi par $\mathfrak{M}$ dans un ensemble M est une *suite* [1]) *finie*, lorsque

(9) $\mathfrak{M}$ est une „classe bien ordonnée des ensembles croissants“.

Les conditions 1, 7 et 9 étant vérifiées, toute sous-classe de $\mathfrak{M}$ contient un élément, qui y est le plus grand, et un autre, qui y est le plus petit. Pour obtenir une définition de s u i t e i n f i n i e (du type ω), on suppose que la cond. 9 n'est pas vérifiée et on la remplace par la suivante:

(10) $\mathfrak{X}$ étant une sous-classe de $\mathfrak{M}$ telle que la somme de ses éléments n'est pas identique à M, il existe un élément de $\mathfrak{X}$, qui y est le plus petit.

Dans ma Note précitée se trouve la définition suivante de l'ensemble fini:

[1]) Il n'est question ici que des suites dont tous les termes sont différents.

Définition IV. M est un ensemble *fini*, lorsque la classe de tous ses sous-ensembles est l'unique classe, qui vérifie les conditions suivantes:

(11) tous ses éléments sont des sous-ensembles de M,

(12) tous les ensembles, composés d'un seul élément de M, lui appartiennent,

(13) X et Y étant ses éléments, $X+Y$ l'est aussi.

Il est important de voir qu'on peut démontrer le théorème suivant, sans faire intervenir la notion du nombre naturel:

pour qu'un ensemble soit fini au sens de la déf. IV, il faut et il suffit, qu'il puisse être rangé en une suite finie au sens de la déf. III [1]).

Je démontre ce théorème par une méthode, qui est en harmonie complète avec la théorie des ensembles de M. Zermelo et qui ne fait d'ailleurs l'usage que des cinq premiers axiomes de cette théorie (sans avoir recours à l'axiome „du choix" et à celui „de l'infini").

Théorème I. Tout ensemble composé d'un seul élément est fini.

Théorème II. A et B étant fini, leur somme $A+B$ est finie.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{K}$ une classe, composée uniquement des sous-ensembles de $A+B$, telle que

(i) tout ensemble composé d'un seul élément de $A+B$ est un élément de $\boldsymbol{K}$.

(ii) X et Y étant des éléments de $\boldsymbol{K}$, il en est de même de $X+Y$.

Il s'agit de montrer, que $\boldsymbol{K}$ contient tous les sous-ensembles de $A+B$.

Soit $\boldsymbol{A}$ la classe de tous les sous-ensembles de A qui appartiennent à $\boldsymbol{K}$. En vertu de (i), $\boldsymbol{A}$ admet comme éléments tous les ensembles composés d'un seul élément de A; en vertu de (ii), elle contient la somme de tous deux de ses éléments. Or, A étant fini, $\boldsymbol{A}$ est identique à la classe de tous les sous-ensembles de A; par suite, $\boldsymbol{K}$ contient tout sous-ensemble de A. Il en est de même de B. D'autre part, comme tout sous-ensemble de $A+B$ est une somme d'un sous-ensemble de A et d'un sous-ensemble de B, — tout sous-ensemble de $A+B$ appartient à $\boldsymbol{K}$, en vertu de la cond. (ii).

Théorème III. Tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini.

Démonstration. La classe de tous les sous-ensembles finis d'un ensemble donné M satisfait — d'après les théorèmes I et II — aux conditions (11)—(13). Or, M étant fini, elle est identique à la classe de tous les sous-ensembles de M.

Théorème IV. Tout ensemble qui peut être rangé en une suite finie, est fini.

Démonstration. Soit M un ensemble donné et $\boldsymbol{M}$ une classe qui le range en une suite finie. Soit $\boldsymbol{K}$ la classe de tous les ensembles finis qui sont des éléments de $\boldsymbol{M}$.

[1]) On montre aisément l'équivalence de la définition III et de celle de „l'ensemble doublement bien ordonné" de M. Zermelo (*Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète*, Acta Mathematica 1909).

D'après la déf. III — il existe dans $\boldsymbol{M}$ un élément qui y est le plus petit; celui-ci ne peut contenir plus qu'un seul élément, puisque la classe $\boldsymbol{M}$ est saturée; par conséquent (théor. I), il est un ensemble fini. Donc, la classe $\boldsymbol{K}$ n'est pas vide. Soit K le plus grand de ses éléments.

Supposons — contrairement à la thèse du théorème — que M n'est pas fini; c'est à dire, que la classe $\boldsymbol{M}-\boldsymbol{K}$ n'est pas vide. Soit L son élément le plus petit. En vertu du théor. III, on a: $K \subset L$.

La classe $\boldsymbol{M}$ étant saturée, les ensembles L et K ne diffèrent que par un seul élément; donc, (théor. I et II) — K étant fini il en est de même de L. Ainsi, notre supposition, que l'ensemble M n'était pas fini, était fausse. C. Q. F. D.

Théorème V. Tout ensemble composé d'un seul élément peut être rangé en une suite finie.

Démonstration. En effet, la classe dont cet ensemble est l'unique élément le range en une suite finie.

Théorème VI. Si les ensembles A et B peuvent être rangés en une suite finie, leur somme $A+B$ peut l'être aussi.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{A}$ une classe qui range l'ensemble A en une suite finie et soit $\boldsymbol{B}$ une classe qui le fait par rapport à B. Soit $\boldsymbol{D}$ la classe que l'on obtient de $\boldsymbol{A}$ en y remplaçant chaque élément X par la somme $X+B$. Posons $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}$; je dis, que la classe $\boldsymbol{C}$ range l'ensemble $A+B$ en une suite finie.

En effet, on voit immédiatement, que $\boldsymbol{C}$ satisfait aux conditions 1, 2 et 6. Nous montrerons qu'elle vérifie aussi les conditions 7 et 9. Soit $\boldsymbol{K}$ une sous-classe quelconque de $\boldsymbol{C}$. Si on suppose que $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{B}$, il en résulte évidemment, que $\boldsymbol{K}$ contient un élément le plus grand et un le plus petit; supposons donc que cette inclusion n'est pas vérifiée. Tout élément de $\boldsymbol{K}$ qui appartient à $\boldsymbol{D}$ peut être représenté sous la forme $X+B$, où $X \varepsilon \boldsymbol{A}$; soit X_1 le plus grand X et X_2 le plus petit. Or, X_1+B est le plus grand élément de $\boldsymbol{K}$. Quant à l'élément qui y est le plus petit, deux cas peuvent se présenter:

1. $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{D}$, donc X_1+B est le plus petit élément de $\boldsymbol{K}$;
2. dans le cas contraire, il existe dans $\boldsymbol{K}$ des éléments de $\boldsymbol{B}$; le plus petit de ces éléments est évidemment un sous-ensemble de tout autre élément de $\boldsymbol{K}$.

Donc, toute sous-classe $\boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{C}$ contient un élément le plus petit et un le plus grand (cond. 7 et 9). En vertu de la déf. III — cela veut dire, que $\boldsymbol{C}$ range l'ensemble $A+B$ en une suite finie. C. Q. F. D.

Corollaire. Tout ensemble firi peut être rangé en une suite finie.

Démonstration. Soit M un ensemble fini. Envisageons la classe de tous les sous-ensembles de M, qui peuvent être rangés en une suite finie. En vertu des théor. V et VI et de la déf. IV — cette classe contient tous les sous-ensembles de M et, en particulier, l'ensemble M lui-même. C. Q. F. D.

Ce corollaire et le théorème IV impliquent immédiatement le théorème que nous nous avions proposé à établir:

Théorème. Pour qu'un ensemble soit fini, il faut et il suffit, qu'il puisse être rangé en une suite finie.

Nous terminons cette note par une remarque suivante sur la notion de paire ordonnée.

Soit A un ensemble composé de deux éléments a et b.

Il n'existe que deux classes, qui établissent un ordre dans A, à savoir:

$$((a, b), (a))\ ^{1)} \quad \text{et} \quad ((a, b), (b)).$$

Il semble bien naturel d'admettre la définition suivante:

Définition V. La classe $((a, b), (a))$ est une *„paire ordonnée* dont a est le premier élément et b est le second".

La notion de paire ordonnée est, comme on sait une des plus importantes dans la théorie des ensembles et il est bien utile d'avoir pour elle une définition [2]) suffisamment simple. En admettre celle que nous venons de proposer est une conséquence immédiate de l'emploi de la théorie de l'ordre qui a été discutée ici.

J'adresse mes remerciements à M. Knaster qui a bien voulu m'aider à rédiger cette note.

[1]) $((a, b), (a))$ est la classe composée de deux éléments: 1° de l'ensemble A et 2° de l'ensemble dont a est l'élément unique.

[2]) M. Hausdorff (l. c., p 32) introduit la notion de paire ordonnée de la manière suivante:

Soit a et b deux éléments quelconques; soit 1 et 2 deux éléments différents, dont aucun n'est identique ni à a ni à b; les classes

$$((a, 1), (b, 2)) \quad \text{et} \quad ((a, 2), (b, 1))$$

sont des paires ordonnées.

Cette définition me semble moins commode, car les éléments 1 et 2 ne peuvent pas être déterminés indépendemment de a et b; en effet, si on leur assigne un sens indépendant de a et de b, on doit modifier la définition pour la cas, où a ou b coïncide avec 1 ou 2.