Solution d'un problème concernant les images continues d'ensembles de points.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

M. Sierpiński a posé le problème suivant[1]:

Lorsque un ensemble de points P est une image biunivoque et continue (mais pas nécessairement bicontinue) de l'ensemble Q et lorsque Q est une image biunivoque et continue de l'ensemble P, peut-on affirmer que les ensembles P et Q sont homéomorphes?

La réponse est *négative.*

Soit, en effet, dans l'espace linéaire: P l'ensemble composé de tous les points de la forme $3n+2$ et des points intérieurs des segments $(3n, 3n+1)$ pour tout n entier $\geqslant 0$. Soit Q l'ensemble qu'on obtient de P, en y remplaçant le point 2 par le point 1[2].

P et Q ne sont pas homéomorphes, puisque, comme on voit sans peine, P ne contient aucun point, qui corresponde au point 1 de Q. En même temps, P et Q satisfont aux conditions du problème (nous les appellerons conditions S).

En effet, soit $f(x)$ une fonction définie pour tout point x de P comme il suit:

$$f(2)=1$$

et

$$f(x)=x, \quad \text{pour} \quad x \neq 2;$$

cette fonction donne évidemment une transformation biunivoque et continue de P en Q. D'autre part, posons pour tout x de Q:

[1] Voir ce journal, vol. I, p. 223 (Problème 1).

[2] Nous laissons au lecteur de tracer les figures.

$$g(x) = \frac{x}{2} \qquad \text{lorsque} \qquad x \leqslant 1,$$

$$g(x) = \frac{x}{2} - 1 \qquad " \qquad 3 < x < 4,$$

$$g(x) = x - 3 \qquad " \qquad x \geqslant 5;$$

la fonction $g(x)$, biunivoque et continue, transforme à son tour Q en P.

Donc, P et Q constituent bien un exemple des ensembles qui, tout en vérifiant les conditions (S) du problème, ne sont pas homéomorphes. Ainsi, la solution du problème est négative.

Nous allons montrer qu'il existe de tels exemples 1°: parmi les continus (non bornés) et 2°: parmi les ensembles clairsemés (donc dénombrables).

I. Le continu (non borné) P est composé:

a) de la droite $y = 0$ (du plan XY),

b) des droites $x = n$ pour tout n entier $\geqslant 0$,

c) de toutes les circonférences de rayon $\frac{1}{3}$ et de centre $(n, \pm \frac{1}{3})$ pour $n < 0$.

En remplaçant dans P la partie de l'axe Y située sous l'axe X par la circonférence de rayon $\frac{1}{3}$ et de centre $(0, -\frac{1}{3})$, on obtient le continu Q. La transformation de la demi-droite en circonférence peut évidemment être biunivoque et continue; de même, Q est une image biunivoque et continue de P.

Inversement, pour passer de Q à P il suffit d'y transformer la partie positive de l'axe Y en une circonférence de rayon $\frac{1}{3}$ et de centre $(0, +\frac{1}{3})$ et de déplacer le tout en arrière par soustraction d'une unité aux abscisses.

Donc, les continus P et Q vérifient les conditions (S); en même temps, ils ne sont pas homéomorphes, car Q contient un point de ramification de cinquième ordre (le point 0,0), tandis que P n'en contient pas. C. Q. F. D.

II. P se compose du point 0 et de tous les points de la forme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ (de l'espace linéaire), où m et n sont des nombres entiers satisfaisant aux conditions:

α) $n > m > 1$,

β) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ n'est pas une réciproque d'un nombre naturel.

Q est composé du point 0 et de tous les points positifs, dont les distances du points 0 sont ou bien des nombres naturels, ou bien leurs réciproques [1]).

On voit aisément que les ensembles P et Q ne contiennent aucun sous-ensemble dense-en soi, c. à. d. qu'ils sont clairsemés.

L'ensemble dérivé P' de P se compose du point 0 et des points de la forme $\frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$; 0 étant le seul point de l'ensemble $P \times P'$, tout son entourage dans P est non fermé et, par conséquent, aucun point de l'ensemble fermé Q ne peut lui correspondre dans une transformation homéomorphe.

Il est ainsi établi que P et Q ne sont pas homéomorphes.

Nous montrerons qu'ils vérifient les conditions (S).

Pour transformer P en Q faisons correspondre au point 0 de P le point 0 de Q et:

1° établissons une correspondance biunivoque quelconque entre ces points de P et ceux de Q qui sont situés entre 0 et $\frac{1}{2}$;

2° établissons une telle correspondance entre ces points de P et ceux de Q qui vérifient l'inégalité $x \geqslant \frac{1}{2}$.

Il est aisé de voir que cette transformation est biunivoque et continue.

Inversement, pour passer de Q à P on fait correspondre:

1° le point 0 de P au point 0 de Q;

2° pour tout $n \geqslant 2$, les points $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ [2]) de P aux points $\frac{1}{n}$ de Q;

3° on établit une correspondance biunivoque quelconque entre les points $(1, 2, 3, \dots)$ de Q et ceux de P qui n'ont pas encore servi d'images aux points de Q. Cette transformation est aussi biunivoque et continue.

Donc, les conditions (S) sont vérifiées. C. Q. F. D.

[1]) Q est un ensemble fermé et non borné; il peut être remplacé — sans qu'on change les conditions du problème — par un ensemble borné; celui-ci ne pourrait plus être fermé, puisque toute transformation biunivoque et continue d'un ensemble borné et fermé est bicontinue.

[2]) On montre sans peine que les nombres $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ ne sont jamais des réciproques des nombres naturels. Donc, les points $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ appartiennent à P en vertu de (β).