Sur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait.

Par

Nicolas Lusin (Moscou) [1].

En 1914 j'ai démontré que si la puissance du continu est *aleph-un*, il existe dans l'intervalle (0,1) un ensemble non dénombrable G qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait situé dans (0,1) [2]. Le but de cette Note est de démontrer le même sans l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Il résulte de l'axiome du choix, comme on sait, l'existence d'un ensemble bien ordonné G du type Ω (Ω désignant le plus petit nombre de la troisième classe)

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

de fractions continues

$$x_\alpha = \frac{1|}{|a'_\alpha} + \frac{1|}{|a''_\alpha} + \frac{1|}{|a'''_\alpha} + \cdots,$$

tel que pour tout système de deux nombres ordinaux $< \Omega$, α et $\beta > \alpha$, existe un indice $p = p(\alpha, \beta)$ tel que

$$a^{(k)}_\beta > a^{(k)}_\alpha \quad \text{pour} \quad k \geqslant p \text{ [3]}.$$

[1]) Cette note, contenant des résultats trouvés par M. Lusin en 1917, est publiée sur la responsabilité de M. Sierpiński.

[2]) N. Lusin: Sur un problème de M. Baire. *Comptes Rendus* t. 158, p. 1259 (note du 4 mai 1914).

[3]) Cf. p. e. A. Schoenflies: Entwickelung der Mengenlehre. Erste Hälfte. Leipzig 1913, p. 221.

Nous démontrerons que l'ensemble G est de première catégorie par rapport à tout ensemble parfait (et parsuite aussi par rapport à tout ensemble linéaire).

Soit P un ensemble parfait (linéaire) donné. Si l'ensemble G n'est pas non dense dans P, P se compose d'un nombre fini ou d'une infinité au plus dénombrable de portions dans lesquelles G est dense, et d'un ensemble R tel que l'ensemble GR est non dense dans P. Soit Q une de ces portions. Pour démontrer notre assertion il suffira évidemment de prouver que l'ensemble G est de première catégorie dans Q.

L'ensemble G étant dense dans Q, il existe un sous-ensemble dénombrable de G, dense dans Q, soit

(2) $$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots$$

Les indices $\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3, \ldots$ formant une suite dénombrable de nombres ordinaux de la première ou deuxième classe, il existe, comme on sait, un nombre transfini $\mu < \Omega$, supérieur à chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

L'ensemble de tous les nombres x_α, où $\alpha \leqslant \mu$, étant au plus dénombrable, il suffira de démontrer plus loin que l'ensemble G_μ de tous ces nombres x_α, pour lesquels $\alpha > \mu$, est de première catégorie dans Q.

L'ensemble G_μ fait évidemment partie de l'ensemble

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots,$$

où E_n désigne l'ensemble de tous ces fractions

(3) $$x = \frac{1|}{|a'} + \frac{}{|a''} + \frac{}{|a'''} + \ldots$$

pour lesquelles

(4) $$a^{(k)} > a_\mu^{(k)} \quad \text{pour} \quad k \geqslant n.$$

Il suffira évidemment de démontrer plus loin que l'ensemble E_n est non dense dans Q. A ce but il suffira, comme on voit sans peine, de prouver que tout point de la suite (2) a une distance positive de l'ensemble E_n.

Soit donc m un nombre naturel donné. D'après la définition du nombre μ et de la suite (1), il existe un nombre naturel p_m tel que

(5) $$a_\mu^{(k)} > a_{\alpha_m}^{(k)} \quad \text{pour} \quad k \geqslant p_m.$$

Soit $q = \max(n, p_m)$; d'après (4) et (5) nous aurons pour tout point x de E_n donnant le développement (3):

$$a^{(q)} > a_{\mu}^{(q)} > a_{\alpha_m}^{(q)}.$$

Les développements en fractions infinies de x et de x_{α_m} se diffèrent donc dans le q-ième dénominateur. Il en résulte tout de suite que x_{α_m} ne peut être point d'accumulation de l'ensemble E_n. L'ensemble (2) étant dense dans Q, cela démontre que l'ensemble E_n est non dense dans Q, c. q. f. d.

Nous avons donc démontré que l'ensemble (non dénombrable) G est de première catégorie dans tout ensemble parfait.

Posons maintenant $f(x) = 1$ pour les points x de G et $f(x) = 0$ pour tous les autres x réels. L'ensemble de tous les nombres x pour lesquels $f(x) > 0$ coïncide évidemment avec l'ensemble G: c'est donc un ensemble non dénombrable, non dense dans tout ensemble parfait. Or, un tel ensemble est non mesurable B, puisque, d'après un théorème de MM. Alexandroff-Hausdorff, tout ensemble non dénombrable mesurable B contient un sous-ensemble parfait, dans lequel il ne peut pas être évidemment de première catégorie. Par conséquent la fonction $f(x)$ ne peut pas être représentable analytiquement. D'autre part $f(x)$ est évidemment une fonction continue $(= 0)$ sur tout ensemble parfait, quand on néglige l'ensemble G qui est de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait. Donc: la condition de M. Baire, nécessaire pour qu'une fonction soit représentable analytiquement[1]), n'est pas suffisante.

[1]) V. H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement: XVI (*Journ. de Math.* 1905, p. 188).