Sur un ensemble non dénombrable de points, superposable avec les moitiés de sa partie aliquote.

Par

Stanisław Ruziewicz (Léopol).

MM. Mazurkiewicz et Sierpiński ont donné un exemple d'un ensemble plan qui se décompose en deux parties sans points communs et qui est superposable avec chacune de ces parties [1]). Cet ensemble est dénombrable; or M. Steinhaus a posé le problème de construire un ensemble non dénombrable, jouissant de ladité propriété.

Dans cette Note je m'occupe d'un problème connexe: je démontre l'existence d'un ensemble plan non dénombrable, superposable avec deux de ses sous-ensembles qui sont sans points communs. La méthode que j'utilise est analogue à celle de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński. Au lieu du point 0 qui donne l'ensemble désiré par certains mouvement dans le plan, je prend un ensemble non dénombrable B. La construction de cet ensemble faisait usage du théorème de M. Zermelo (Wohlordnungssatz) et de la théorie des nombres transfinis. C'est grace à une remarque de M. Sierpiński que j'ai pu construire mon ensemble en m'appuyant seulemeut sur l'axiome du choix, sans faire appel au théorème de M. Zermelo et aux nombres transfinis.

Désignons pour tout nombre complexe donné z par $E(z)$ l'ensemble de tous les nombres complexes de la forme

$$R_1(e^i) \cdot z + R_2(e^i),$$

$R_1(e^i)$ et $R_2(e^i)$ étant des fonctions rationnelles en e^i aux coefficients entiers et $R_1(e^i) \neq 0$. On voit sans peine que pour $z \neq z'$ les en-

[1]) *Comptes Rendus*, t. 158, p. 618 (note du 2 mars 1914).

sembles $E(z)$ et $E(z')$ coïncident ou sont sans points communs. Tout ensemble $E(z)$, comme ayant même puissance que l'ensemble de tous les systèmes (R_1, R_2) de deux fonctions rationnelles aux coefficients entiers, est dénombrable.

Divisons tous les nombres complexes en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres z et z' dans ce cas et seulement dans ce cas, si $E(z) = E(z')$. Chacune classe contiendra une infinité denombrable de nombres: l'ensemble de toutes les classes aura donc la puissance du continu.

Écartons la classe K_0 qui contient le nombre 0 (c'est-à-dire la classe formée de tous les nombres complexes qui s'expriment rationnellement en e^i avec des coefficients entiers); de chacune des classes qui resteront choisissons un élément: soit B l'ensemble de tous le éléments choisis.

Considérons maintenant deux opérations:

$$T(z) = z + 1 \quad \text{et} \quad R(z) = e^i \,.\, z;$$

ces opérations, appliquées à tous les points d'un ensemble donné Z, le transforment en un ensemble $T(Z)$, resp. $R(Z)$, dont le premier est évidemment superposable avec Z par une translation et le second — par une rotation.

Désignons maintenant par C, resp. D, la somme de tous ces ensembles qu'on déduit de l'ensemble B en appliquant un nombre fini de fois les opérations T et R dans un ordre quelconque, mais tel que la dernière opération efféctuée soit T, resp. R.

En posant

$$A = B + C + D,$$

nous aurons évidemment:

$$T(A) = C \quad \text{et} \quad R(A) = D:$$

les ensembles C et D sont donc superposables avec A. Il nous reste à démontrer que les ensembles C et D sont sans points communs.

Remarquons d'abord que, z étant un nombre donné, tout nombre qu'on en déduit, en appliquant un nombre fini de fois les opérations T et R (dans un ordre quelconque) est de la forme

$$P_1(e^i) \,.\, z + P_2(e^i),$$

où $P_1(e^i)$ et $P_2(e^i)$ sont des polynomes en e^i aux coefficients entiers (non négatifs), et on voit sans peine que $P_1(e^i) \neq 0$ et que le terme constant du polynome $P_2(e^i)$ est positif ou nul, suivant que la dernière opération effectuée est l'opération T ou R.

Admettons maintenant que les ensembles C et D ont un point commun p. Il résulte tout de suite de la définition de ces ensembles et de la remarque que nous venons de faire qu'il existe des points z_1 et z_2 de B, tels que

$$(1) \qquad p = P(e^i)z_1 + P_2(e^i) \quad \text{et} \quad p = Q_1(e^i)z_2 + Q_2(e^i),$$

P_1, P_2, Q_1 et Q_2 étant des polynomes en e^i aux coefficients entiers, P_1 et Q_1 non nuls, et le terme constant de $P_2(e^i)$ étant positif et celui de $Q_2(e^i)$ nul. Le nombre e^i ètant, comme on sait, transcendant, il s'en suit que

$$(2) \qquad P_2(e^i) \neq Q_2(e^i).$$

Les formules (1) donnent

$$(3) \qquad P_1(e^i)z_1 + P_2(e^i) = Q_1(e^i)z_2 + Q_2(e^i).$$

Les nombres $P_1(e^i)$ et $Q_1(e^i)$ étant non nuls, la formule (3) donne

$$z_1 = R_1(e^i)z_2 + R_2(e^i),$$

où $R_1(e^i)$ et $R_2(e^i)$ sont des fonctions rationnelles en e^i aux coefficients entiers, et $R_1(e^i) \neq 0$. Il en résulte que les nombres z_1 et z_2 appartiennent à une même classe, ce qui est possible, d'après la définition de l'ensemble B, seulement si $z_1 = z_2$. Or, la formule (3) donne dans ce cas:

$$(4) \qquad P_1(e^i)z_1 + P_2(e^i) = Q_1(e^i)z_1 + Q_2(e^i).$$

Il ne peut être ici $P_1(e^i) = Q_1(e^i)$, puisque la formule (4) donnerait alors $P_2(e^i) = Q_2(e^i)$, contrairement à (2). Nous avons donc $P_1(e^i) \neq Q_1(e^i)$ et la formule (4) donne

$$z_1 = \frac{Q_2(e^i) - P_2(e^i)}{P_1(e^i) - Q_1(e^i)},$$

ce qui est impossible, puisque l'ensemble B ne contient, d'après sa définition, aucun nombre de la classe K_0. Nous avons donc démontré que les ensemble C et D sont sans point commun.

Notre „exemple" d'un ensemble plan non dénombrable, superposable avec les moitiés de sa partie aliquote, est non effectif. On le pourrait rendre effectif et éviter dans notre raisonnement l'axiome du choix, si l'on saurait définir effectivement un ensemble non dénombrable de nombres complexes, dont aucuns deux nombres différents z_1 et z_2 ne sont pas liés par une relation

$$z_2 = R_1(e^i) z_1 + R_2(e^i),$$

où $R_1(e^i)$ et $R_2(e^i)$ sont des fonctions rationnelles en e^i aux coefficients entiers. Or ce problème me semble difficile.