Sul concetto del differenziale esatto.

Nota di

Witold Wilkosz (Cracovia).

1. Il concetto introdotto da Stolz e Peano per la teoria delle funzioni ed operazioni funzionali, quello del differenziale totale od esatto, ha ottenuto il campo delle vaste e varie applicazioni peri lavori degli analisti tali come Stolz e Peano stessi, dappoi Fréchet, Young, De la' Vallée Poussin e gli altri. In questa nota vogliamo dimostrare le condizioni necessarie e sufficienti d'esistenza del differenziale totale i primi secondo il nostro perere — che non hanno la forma puremente geometrica ma traducono in un certo modo le nozioni geometriche in forma analitica.

Le condizioni date da noi sono d'un certo tipo direi „polare" perchè conesse intieramente colla rappresentazione dei punti in uno spazio a n-dimensioni o spazii funzionali nelle coordinate polari.

Noi ci limiteremo soltanto al caso delle due variabili — la generalisazione per n-dimensioni è evidente — Sign. Banach traducendo per così dire le mie condizioni nella lingua delle operazioni funzionali ha ottenuto testualmente medesime per le funzioni delle linee concepite in modo dato da Volterra

Incomincio colla riproduzione delle definizioni principali.

2. Consideriamo una funzione a due variabili reali $f(xy)$ definita in un certo intorno (U) del punto (a, b).

Ammettiamo, che in quello intorno (U) o piùtosto in intorno contenuto in U esiste la scomposizione dell' incremento di $f(xy)$ tale·

$$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varrho(h, k) . \Delta$$

ove:

(1) A, B sono costanti,

(2) Δ indica la distanza dei punti $O(a, b)$ e $P(a+h, b+k)$ cioè $\Delta = \sqrt{h^2+k^2}$,

(3) $\lim\limits_{h,\, k=0} \varrho(h, k) = 0$.

In questo caso diremo, che la $f(xy)$ ammette in punto O il differenziale totale essendo quella la espresione

$$Ah + Bk,$$

funzione lineare ed omogenea di h e k. La denoteremo con $d\,f(a, b)$ o più esattamente: $\underset{h,\,k}{d} f(ab)$.

Si olimostra in un modo facile che, se $f(xy)$ ammette in un punto un differenziale — ne ammette un solo, cioè le costanti A, B sono ben determinate in tal caso. Esistenza in O del diff. tot. implica la continuità della $f(xy)$ in questo punto e. c. v....

3. Introduciamo qualche considerazioni geometriche. La funzione $z = f(xy)$ rappresenta in (U) una superficie (S). Chiamo la sezione principale nella direzione α della (S) quella data da un semipiano terminato per la retta $(x = a,\ y = b)$ dello spazio e passante per il raggio sul piano (xy) dato da

$$\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\sin\alpha \end{cases} \qquad r \geqq 0.$$

Denoteremo:

$$R_\alpha(r) = \frac{f(a + r\cos\alpha,\ b + r\sin\alpha) - f(ab)}{r}$$

l'incremento funzionalle nella direzione α.

Se il limite:

$$\lim_{r=0} R_\alpha(r) = R_\alpha \qquad (\alpha \text{ costante})$$

esiste, allora la sezione principale nella direzione α ammette nel punto $M(a, b, f(ab))$ una semitangente T_α di cui coefficiente angolare sarà R_α.

Possiamo adesso enunciare le nostre condizioni necessarie e sufficienti affinchè esiste il diffenrenziale totale della $f(xy)$ in punto $O(a, b)$.

4. Le dette condizioni si enunciano così:

1º $f(xy)$ e definita in un intorno (U) del punto $O(ab)$.

2º Per ogni sezione principale esiste la semitangente non perpendicolare al piano (xy) — cioè R_α ha per ogni α il valore finito.

3º Le semitangenti T_α per ogni direzione formano insieme un piano solo cioè R_α sono linearmente dipendenti dai coefficienti angolari della direzione.

4º La convergenza di $R_\alpha(r)$ alla R_α è uniforme secondo α.

Dimostrazione. I. Necessità.

Il primo punto e evidente per la definizione stessa del differenziale,

Per il secondo ammetiamo la scomposizione:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varrho(h, k) \cdot \Delta$$

colle sopradette condizioni relative.

Allora:

$$R_\alpha(r) = A \cos \alpha + B \sin \alpha + \varrho(r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

quindi

$$R_\alpha = A \cos \alpha + B \sin \alpha,$$

per lo stesso vengono dimonstrati (3) e (4) perchè la differenza:

$$R_\alpha(r) - R_\alpha = \varrho(r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

tende uniformemente colla r.

II. Sufficienza.

Ammettendo le nostre condizioni e ponendo

$$R_\alpha(r) - R_\alpha = \pi(r, \alpha),$$

avremo:

$$\lim_{r \to 0} \pi(r, \alpha) = 0 \qquad \text{(uniformemente)}.$$

E quindi posto:

$$\pi(r, \alpha) = \varrho(h, k) \quad \text{ove} \quad \begin{aligned} h &= r \cos \alpha \\ k &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

avremo lo stesso per $\varrho(h, k)$ col h e k tendenti allo zero.

La (3º) dice che esistono due costanti A, B tali che:

$$R_\alpha = A \cos \alpha + B \sin \alpha,$$

quindi

$$R_\alpha(r) = A \cos \alpha + B \sin \alpha + \pi(\varrho, \alpha),$$

cioè

$$f(a+r\cos\alpha,\ b+r\sin\alpha)-f(ab)=$$
$$=Ar\cos\alpha+Br\sin\alpha+r\pi(\varrho,\alpha),$$

ovvero:

$$f(a+h, b+k)-f(ab)=Ah+Bk+\varDelta\varrho(h,k)$$

(1) $\varDelta=r.$

(2) $\lim\limits_{h,\,k=0}\varrho(h;k)=0.$

5. Le condizioni 1^0, 2^0, 4^0 soli non sono sufficienti per la differenziabilità:

Esempio sarebbe dato da un cono di cui

(1) asse passa per O e M,

(2) il vertice cade nel punto M,

(3) la basi è un cerchio di centro in $O(a, b)$,

allora T_α è la generatrice del cono,

$R_\alpha(r)$ è indipendente dalla direzione,

$R_\alpha=\operatorname{tg}\alpha$ ove 2α è l'angolo del cono.

Manca soltanta la (3^0).

6. Le condizioni 1^0, 2^0, 3^0 non sono ancora sufficienti:

Esempio: Consideriamo:

$$z=\frac{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)^2+y^2}\quad \text{per}\quad x^2+y^2\neq 0,$$
$$z=0\qquad\qquad \text{per}\quad x=y=0$$

e sia $a=b=0$.

Quella è una funzione continua ciò che scatturisce dalla rappresentazione polare:

$$z=\frac{r^2\sin\alpha}{r^2+\sin^2\alpha}.$$

Prendiamo r costante e cerchiamo il massimo del valor assoluto sulla circonferenza di raggio r — Per $r<1$ troveremo:

$$Mass\,|\,z\,|=\frac{r}{2}$$

e quindi

$$\lim_{r=0} Mass\,|\,z\,|=0.$$

Dappoi:

$$R_\alpha(r) = \frac{r \sin \alpha}{r^2 + \sin^2 \alpha},$$

quindi $R_\alpha = 0$ per ogni α cosìche: $A = B = 0$.

Ma $R_\alpha(r)$ non tende uniformemente allo zero perche p. es. per:

$$r = \sin \alpha, \qquad \alpha = arc \sin r,$$

avremo:

$$R_\alpha(r) = \tfrac{1}{2},$$

quello che trae con se la non-esistenza del differenziale.

7. Riccordando che (secondo Fréchet)

la condizione della differenziabilità equivale alla condizione di esistenza del piano tangente determinato non verticale, giova enunziare le nostre condizioni come quelli sufficienti e necessarie per la esistenza del sopradetto piano.

In una altra nota ci mostreremo le condizioni analoghe nel campo delle operazioni differenziali e qualche applicazione di quelle.