Una condizione di rappresentazione per le serie.

Nota di

Witold Wilkosz (Cracovia).

1. L'oggetto trattato in questa piccola memoria sembra essere adesso di minore importanza.

Scrivere oggi sugli integrali di Riemann in tempo ove gli integrali di Lebesgue hanno occùpato il posto principale in Analisi moderna pare trattare un tema antico e svegliato. Eppure la classe delle funzioni integrabili nel senzo di Riemann ha un mucchio delle proprietà curiose e finora ben poco note Si tratta principalmente in questa nota, mostrare una condizione necessaria e sufficiente perchè una serie delle funzioni (R) rappresenta la funzione di stesso genere — La condizione data da noi può forse prestare qualche interesso, perchè usa soltanto i concetti introdotti (o piùtosto virtualmente contenuti in quelli) da Arzelà per la rappresentazione delle funzioni continue.

Considerazioni di un carattere generale chiudono la memoria.

2. Supponiamo data una serie delle funzioni

$$(*) \qquad f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots$$

convergenti in un intervallo $[ab]$ ad una funzione $f(x)$, cosicche avremo:

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x).$$

Diremo la convergenza semplicemente uniforme (SU) in un punto z se:

per ogni $\varepsilon > 0$ ed N intiero noi possiamo trovare

$$\delta > 0 \quad \text{e} \quad n > N \quad \text{tali che}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad |x - z| < \delta.$$

3. Notiamo tre fatti concernenti la (SU)

α) Se in punto z ogni funzione $f_n(x)$ è continua e la serie (*) è (SU) in z, allora la funzione limite $f(x)$ è continua anch' essa per $x = z$.

β) Reciprocamente se $f_n(x)$ e $f(x)$ sono continue per ogni n in punto $x = z$ allora la convergenza è (SU) in questo punto.

γ) La condizione necessaria e sufficiente affiuche per la serie (*) delle funzioni continue in $[ab]$ anche $f(x)$ sia tale, è la (SU) in ogni punto dell' intervallo. Questa condizione equivale alla „convergenza uniforme a tratti" di Arzelà.

Le dimostrazioni sono virtualmente contenuti nelle considerazioni su questo argomento in Hobson: Theory of fonctions of one real variable.

4. Ora possiamo stabilire la condizione per la funzioni (R).

Se la serie (*) convergente ad $f(x)$ limitata ha tutti i termini $f(x)$ $n = 1, 2 \ldots$ Riemanniani allora la condizione necessaria e sufficiente perchè la $f(x)$ sia (R) è la (SU) in „quasi" ogni punto di $[ab]$ cioè con una possibile eccezzione dell' insieme di misura nulla.

Dimostrazione: α) Indicando con E_n e E insiemi dei punti in $[ab]$ ove $f_n(x)$ risp. $f(x)$ è discontinua avremo in nostro caso

$$m' E_n = 0 \qquad n = 1, 2 \ldots \qquad (\text{misura di } E_n).$$

La somma delle E_n sia F, ha anch'essa la misura nulla — indicando con G il resto dell intervallo abbiamo:

$$m' G = m' [ab].$$

In ogni punto di G ogni $f_n(x)$ è continua.

β) Denotiamo ora con K insieme dei punti di (SU) e supponiamo prima:

$$m' K = m' [ab],$$

allora:

$$m' (G \times K) = m' [ab].$$

In ogni tale punto, $f(x)$ è continua quindi essendo limitata è anche (R) in $[ab]$.

γ) Se adesso supporremo:

$$m' E = 0 \quad \text{cioè} \quad f(x) \quad \text{essere } (R),$$

allora

$$m' (G \times E) = 0,$$

quindi:

$$m'(G-E)=m'[ab].$$

In ogni punto di $G-E$ sono continue tutte le $f_n(x)$ e anche $f(x)$ — quindi in un tal punto la convergenze è (SU).

Insieme dei punti di (SU) ha allora la misura uguale alla $m'[ab]$.

5. Consideriamo adesso il gruppo delle funzioni Riemanniane generalizate (RG) cioè:

limitate o no, ma aventi i punti della discontinuita in un insieme di misura nulla. Tali funzioni hanno la loro importanza nella teoria d'integrazione di De La Vallée Poussin (c. f Hobson op. cit.).

Allora la condizione necessaria e sufficiente perchè la serie (*) delle (RG) convergente in $[ab]$ rappresenta una (RG) é la stessa che in caso delle (R).

6. Per occasione indichiamo ancora la soluzione di qualche problema sulla (R).

α) Supponiamo data una (R) p. es $f(x)$; possiamo noi, cambiando la definizione di $f(x)$ in un insieme di misura nulla renderla continua in tutto l'intervallo?

La risposta facile è negativa:

Prendiamo $$f(x)=0 \quad \text{per} \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$
$$f(x)=1 \quad \text{per} \quad 1 < x \leqq 2,$$

allora la discontinuità in $x=1$ è evidentemente non removabile in tal modo.

β) Altra quistione sia: data $f(x)$ misurabile (L) in $[ab]$; possiamo noi per un cambiamento di stesso genere renderla (RG)?

Anche qui la risposta sarà negativa:

Consideriamo p. es $f(x)$ definita così.

$f(x)=1$ in un insieme perfetto Z. denso in $[0,1]$ e di misura $= {}^1/_2$.

Sia $f(x)=0$ nel resto $W=[ab]-Z$.

Cambiando $f(x)$ in un insieme E di misura nulla, rimangono ancora i punti di Z, ove nuova funzione sarà $=1$ — In ogni intorno di tal punto cade un'intervallino complementare di (W). Ma perche $m'Z=0$, allora dopo la modificazione rimangono ancora i punti ove la funzione cambiata assume il valore $=0$. Cioè la discontinuità non è rimovata in quel punto.

γ) Insieme dei valori che assume una (R) in $[ab]$ può essere non-misurabile (L).

Ecco l'esempio: Sia V [1]) un insieme non-misurabile contenuto in $[1, 2]$ di cui potenza $= C$ (quella di continuo).

Sia Z il noto insieme Cantoriano perfetto contenuto in $[0, 1]$ — Facciamo corrispondere ad ogni punto di Z univocamente un punto di V definiendo cosi $f(x)$ in (Z)

Nel resto del $[0, 1]$ poniamo $f(x) = 0$.

Insieme dei valori assunti da $f(x)$ è V più zero quindi non misurabile — Dal resto $f(x)$ è evidentemente Riemanniana.

[1]) Cf. la mia nota „Sugli insiemi non-misurabili (L)" nel I^{mo} tomo di „Fundamenta".