Sur l'approximation des fonctions de première classe.

Par

Stefan Kempisty (Varsovie).

M. Mazurkiewicz a établi une propriété remarquable de fonctions de première classe. Il a montré, en se servant de nombres transfinis, qu'étant donnée une fonction $f(x)$ bornée de classe 1 de M. Baire et un nombre positif ε, on peut construire une fonction $\varphi(x)$ qui est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement et qui vérifie l'inégalité

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$ [1].

Or un théorème analogue a été énoncé par M. de la Vallée Poussin [2]:

Soit f une fonction bornée de classe 1: on peut quel que soit ε positif donné, déterminer une fonction de classe 1 qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes et qui est égale à f à moins de ε près.

M. Sierpiński a rapproché ces deux théorèmes, en démontrant que toute fonction de première classe, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement [3].

On obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème de M. Mazurkiewicz, demonstration qui est libre de nombres trans-

[1]) S. Mazurkiewicz: Sur les fonctions de classe 1: ce volume p. 32

[2]) C. de la Vallée Poussin: Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles. Classes de Baire. Paris 1916, p. 118.

[3]) W. Sierpiński: Démonstration d'un théorème sur les fonctions de première classe: ce volume p. 37.

finis. Mais le théorème de M. de la Vallée Poussin est déduit d'un théorème auxiliaire assez compliqué sur la décomposition de l'ensemble parfait.

Mon but est de donner une démonstration élémentaire du théorème de M. Mazurkiewicz et celui de M. de la Vallée Poussin, en les généralisant aux fonctions non bornées.

Lemme. Soit $g(x)$ la limite d'une suite non décroissante de fonctions semi-continues supérieurement et $h(x)$ la limite d'une suite non croissante de fonctions semi-continues inférieurement. Si

$$g(x) > h(x),$$

il existe une fonction $f(x)$ qui est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement et telle que

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant h(x)\ ^{1)}.$$

Par hypothèse, il existe une suite

$$g_1 \leqslant g_2 \leqslant g_3 \dots \leqslant g_n \leqslant \dots$$

de fonctions semi-continues supérieurement et on a

$$\lim_{n=\infty} g_n = g.$$

Pareillement, il y a une suite

$$h_1 \geqslant h_2 \geqslant h_3 \geqslant \dots \geqslant h_n \geqslant .$$

de fonctions h_n semi-continues inférieurement et de limite $h(x)$.

Posons

$$\{t\} = \tfrac{1}{2}|t| + \tfrac{1}{2}t = \max(t, 0),$$

ce sera une fonction égale à zéro, si $t < 0$ et à t, si $t \geqslant 0$.

Considérons la fonction définie par la série altérée [2])

$$(1)\quad f = g_1 + \{h_1 - g_1\} - \{h_1 - g_2\} + \dots + \{h_n - g_n\} - \{h_n - g_{n+1}\} + \dots$$

[1]) Ce lemme ne subsiste pas pour $g(x) = h(x)$, il est tout de même analogue à un théorème de M. Hahn: voir „Über halbstetige und unstetige Functionen". *Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien*, Bd. 126, p. 92.

[2]) C'est la série considérée par M. Hausdorff dans sa démonstration du théorème de M. Hahn; voir: Über halbstetige Functionen und deren Verallgemeinerung. *Math. Zeitschrift*, Bd. 5 (1919) p. 295.

Il est facile à voir que les sommes partielles de la série (1) (qui est finie pour tout x) ne prendent que les valeurs contenues entre g et h [1]).

Comme les différences $h_n - g_n$ et $h_n - g_{n+1}$ sont semi-continues inférieurement, on voit sans peine que les fonctions: $\{h_n - g_n\}$ et $\{h_n - g_{n+1}\}$ les sont aussi.

Divisons la série (1) en deux parties: l'une composée de termes du rang impair, l'autre — de termes du rang pair. Elles s'écriront:

$$(2) \qquad g_1 - \{h_1 - g_2\} - \{h_2 - g_3\} - \ldots - \{h_n - g_{n+1}\} - \ldots$$

$$(3) \qquad \{h_1 - g_1\} + \{h_2 - g_2\} + \{h_3 - g_3\} + \ldots + \{h_n - g_n\} + \ldots$$

Par l'hypothèse, au point x

$$g(x) > h(x);$$

il existe donc un indice N tel que

$$h_N(x) - g_N(x) < 0.$$

et, à plus forte raison:

$$h_N(x) - g_{N+1}(x) < 0.$$

Les termes des séries (2) et (3) tels que $n \geqslant N$ sont égaux à zéro, par conséquant ces séries sont convergentes.

Posons

$$\varphi = g_1 - \{h_1 - g_2\} - \{h_2 - g_3\} - \ldots - \{h_n - g_{n+1}\} - \ldots$$
$$\psi = - \{h_1 - g_1\} - \{h_2 - g_2\} - \ldots - \{h_n - g_n\} - \ldots;$$

les fonction φ et ψ sont semi-continues supérieurement, comme limites des suites non croissantes de fonctions semi-continues supérieurement; de plus on a

$$f = \varphi - \psi:$$

par conséquent le lemme est démontré.

Corollaire. Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux fonctions de 1re classe et si l'on a toujours

$$f_1(x) > f_2(x),$$

[1]) Cf. F. Hausdorff l. c.

il existe une fonction $f(x)$ qui est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement et telle que

$$f_1(x) \geqslant f(x) \geqslant f_2(x).$$

D'après un théorème de M. Young[1]), $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant des fonctions de 1re classe, il existe une suite non décroissante de fonctions semi-continues supérieurement $g_n(x)$, convergente vers $f_1(x)$ et une suite non crossante de fonctions semi-continues inférieurement, $h_n(x)$, convergente vers $f_2(x)$. Pour démontrer notre corollaire, il suffit donc poser dans le lemme 1:

$$g(x) = f_1(x), \qquad h(x) = f_2(x)$$

Théorème. Si $f(x)$ est une fonction de 1re classe de M. Baire, on peut, quel que soit ε positif donné, déterminer une fonction $\chi(x)$ qui est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement et est égale à $f(x)$ à moins de ε près.

Pour la démonstration il suffit de poser dans le corollaire du lemme 1:

$$f_1(x) = f(x), \qquad f_2(x) = f(x) - \varepsilon.$$

Soit $\chi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions semi-continues supérieurement: nous aurons donc

$$f(x) \geqslant \varphi(x) - \psi(x) \geqslant f(x) - \varepsilon. \tag{4}$$

Pour retrouver le théorème de M. de la Vallée Poussin, il faut considérer les fonctions[2])

$$\varphi_1(x) = \varepsilon E\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \qquad \psi_1(x) = \varepsilon E\frac{\psi(x)}{\varepsilon}, \tag{5}$$

où Et signifie l'entier le plus grand ne dépassant pas t: donc c'est une fonction non décroissante de la variable t. Or il est facile à démontrer qu'une fonction semi-continue supérieurement et non décroissante d'une fonction semi-con-

[1]) W. H. Young: *Proc. Lond. Math. Soc.* 12 (1913) p. 260. Nous avons cité ce théorème et en indiqué une démonstration dans la note „Sur les séries itérées de fonctions continues", ce volume p. 65,

[2]) L'introduction de ces fonctions je dois à M. Sierpiński.

tinue supérieurement est aussi une fonction semi-continue supérieurement [1]).

Par conséquant, d'après (5), les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ seront semi-continues supérieurement en même temps que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ et nous aurons:

$$\varphi(x) - \varepsilon < \varphi_1(x) \leqslant \varphi(x), \qquad \psi(x) - \varepsilon < \psi_1(x) \leqslant \psi(x),$$

donc, d'après (4):

$$f(x) + \varepsilon > \varphi_1(x) - \psi_1(x) > f(x) - 2\varepsilon. \tag{6}$$

Or, la fonction $\chi_1(x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x)$ est évidemment de 1^re^ classe. comme une différence de deux fonctions de 1^re^ classe, et elle ne prend que les valeurs multiples de ε. Nous avons ainsi ce

Théorème: Soit $f(x)$ une fonction de première classe de M. Baire, on peut, quel que soit ε positif donné, déterminer une fonction de classe 1 qui ne prend que les valeurs multiples de ε et qui est égale à $f(x)$ à moins de ε prés.

Or il résulte tout de suite de (6) que $\chi_1(x)$ est bornée, si $f(x)$ l'est [2]): $\chi_1(x)$ ne prend alors qu'un nombre fini de valeurs différentes. Nous arrivons ainsi au théorème de M. de la Vallée Poussin.

[1]) Une fonction continue d'une fonction semi-continue supérieurement n'est pas nécessairement semi-continue supérieurement.

[2]) Cependant les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ peuvent être non bornées, même si $f(x)$ est bornée: cf. la note citée de M. Sierpiński.

Varsovie, juin 1920.