# Un théorème sur les lignes de Jordan.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

**1.** Cette note contient la solution d'un problème posé par MM. Knaster et Kuratowski à la suite de certaines recherches sur l'élimination de notions métriques de l'Analysis Situs.

**2.** Je ne considère que les ensembles tirés d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

**3. Définition.** Le point $a$ découpe le continu $A$, si $A - a$ contient deux points $x, y$ tels, que tout $\mathfrak{C}(x + y, A)$ contient $a$ [1]).

**4.** Si $a$ découpe le continu $A$ et si $b \subset A - a$, alors $A - a$ contient un point $x$ tel, que tout $\mathfrak{C}(b + x, A)$ contient $a$. J'omets la démonstration immédiate.

**5. Théorème.** Prémisse: $A$ est une ligne de Jordan [2]). Thèse $A$ contient au moins deux points qui ne le découpent pas.

La démonstration est basée sur quelques lemmes.

**6. Lemme.** Prémisses: 1) $A$ est une ligne de Jordan; 2) $A$ contient une ligne simple fermée [3]) $B$. Thèse: L'ensemble de points de $B$ qui découpent $A$ est dénombrable au plus.

Démonstration. Soit $b \subset B$, $C$ l'ensemble de tous les points de $B - b$ qui découpent $A$. Il suffit de montrer, que $C$ est au plus dénombrable. D'après 4 à tout $c \subset C$ correspondt un point

[1]) $\mathfrak{C}(x + y, A)$ désigne un ensemble fermé et bien enchaîné, contenant $x$ et $y$ et contenu dans $A$.

[2]) Je ne considère, que les lignes de Jordan stricto sensu. Les lignes de Jordan géneralisées sont exclues (comp. mon mémoire: *Sur les lignes de Jordan*, ce journal t. I **27** et **33**).

[3]) C. à. d. l'image biunivoque et bicontinue d'une circonférence.

$x(c) \subset A - c$, tel que tout $\mathfrak{C}(b + x(c), A)$ contient $c$. Bien entendu $x(c) \neq b$. Montrons d'abord, que:

(1) $$x(c) \subset A - B.$$

Supposons le contraire c. a. d. $x(c) \subset B$. Les points $b$ et $x(c)$ décomposent $B$ en deux arcs simples $B_1$, $B_2$ tels, que $B_1 \times B_2 = b + x(c)$. Le point $c$ étant différent de $b$ et de $x(c)$ est contenu dans l'un seulement de ces arcs; on peut supposer $c \subset B_1$ $B_2$ est par suite un $\mathfrak{C}(b + x(c), A)$ ne contenant pas $c$, ce qui est en contradiction avec la définition de $x(c)$. (1) est ainsi démontré.

En second lieu nous montrerons que si $c_1 \neq c_2$, $c_1 + c_2 \subset C$, alors il existe un $\mathfrak{C}(b + x(c_1), A)$ qui ne contient pas $c_2$. $A$ étant une ligne de Jordan, contient un arc simple $A_1$ aux extrémités: $b$ et $x(c_1)$ [1]. $A_1$ est un $\mathfrak{C}(b + x(c_1), A)$ donc $c_1 \subset A_1$. Si $A_1$ ne contient pas $c_2$ — notre assertion est démontrée, si $c_2 \subset A_1$ les quatre points $b$, $x(c_1)$, $c_1$, $c_2$ se succèdent sur $A_1$ soit dans l'ordre: $b$, $c_1$, $c_2$, $x(c_1)$ — soit dans l'ordre: $b$, $c_2$, $c_1$, $x(c_1)$. Dans le premier cas désignons par $A_2$ la partie de $A_1$ entre $c_2$ et $x(c_1)$. Les points $b$ et $c_2$ décomposent $B$ en deux arcs simples $B_1$, $B_2$ tels que $B_1 \times B_2 = b + c_2$. L'un seulement de ces arcs contient $c_1$; on peut supposer, que $c_1 \subset B_1$. $A_2 + B_2$ est alors un $\mathfrak{C}(b + x(c_1), A)$ ne contenant pas $c_1$. Or un tel ensemble n'existe pas. C'est donc le second cas qui doit avoir lieu. Soit alors $A_3$ la partie de $A_1$ entre $c_1$ et $x(c_1)$. Les points $b$ et $c_1$ décomposent $B$ en deux arcs simples: $B_3$, $B_4$, tels, que $B_3 \times B_4 = b + c_1$. L'un seulement de ces arcs contient $c_2$; la somme de l'autre et de $A_3$ est alors le $\mathfrak{C}(b + x(c_1), A)$ cherché.

Il en résulte que pour $c_1 \neq c_2$, $c_1 + c_2 \subset C$:

(2) $$x(c_1) \neq x(c_2).$$

L'ensemble $D$ de tous les points $x(c)$ a, par suite même puissance que $C$ et il suffit de démontrer que $D$ est un ensemble isolé. Supposons le contraire et soit $x(c_0) \subset D \times D'$. On a d'après (1) — $B$ étant fermé:

(3) $$\varrho(x(c_0), B) = \alpha > 0.$$

Le $x(c_0)$ de $A$ est de premier genre [2], c. à. d. il existe un $\beta > 0$, tel que:

[1] Mazurkiewicz: *Sur les lignes de Jordan* 43.
[2] L. c. 13.

(4) $$\varrho(x, x(c_0)) \leqq \beta,$$
entraîne pour $x \subset A$:

(5) $$\varrho_A(x, x(c_0)) \leqq \frac{\alpha}{3}.$$

En vertu de $x(c_0) \subset D'$, il existe un point $x(c_1) \neq x(c_0)$ tel que:

(6) $$\varrho(x(c_1), x(c_0)) \leqq \beta,$$

donc — (4) entraînant (5):

(7) $$\varrho_A(x(c_1), x(c_0)) \leqq \frac{\alpha}{3}.$$

En vertu de (7) il existe un $\mathfrak{C}(x(c_1) + x(c_0), A)$, nous le désignerons par $E$ tel que [1]):

(8) $$\delta(E) \leqq \tfrac{2}{3}\alpha.$$

Comme $x(c_0) \subset E$, on aura pour $y \subset E$:

(9) $$\varrho(y, x(c_0)) \leqq \delta(E) \leqq \tfrac{2}{3}\alpha,$$

(3) et (9) entraînent:

(10) $$E \times B = 0,$$

donc $E$ ne contient pas $c_0$. D'autre part il existe un $\mathfrak{C}(b + x(c_1), A)$ qui ne contient pas $c_0$; désignons le par $E_1$. $E + E_1$ est evidement un $\mathfrak{C}(b + x(c_0), A)$ qui ne contient pas $c_0$. Mais un tel ensemble n'existe pas d'après la définition de $x(c_0)$. On arrive donc à une contradiction, en supposant $D \times D' \neq 0$ et notre lemme est démontré.

**7. Définition.** Nous dirons que l'ensemble $B$ est un a r c s i m p l e s a t u r é d e $A$, si: 1) $B \subset A$, 2) $B$ est un arc simple, 3) $B$ est saturé par rapport aux proprietés 1) et 2) [2]).

**8. Lemme.** P r é m i s s e s: 1) $A$ e s t u n e l i g n e d e J o r d a n, 2) $B$ — u n a r c s i m p l e s a t u r é d e $A$, 3) $a$ — u n e e x t r é m i t é d e $B$. T h è s e: $a$ n e d é c o u p e p a s $A$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons le contraire. Soit $b$ l'autre extrémité de $B$. Il existe un $c \subset A - a$, tel que tout $\mathfrak{C}(b + c, A)$ contient $a$ (d'après 4). $A$ étant une ligne de Jordan contient un arc simple $C$, aux extrémités $b$, $c$. On a: $a \subset C$. Soit $C_1$ la partie de $C$ entre $a$ et $c$.

[1]) L. c. 8.

[2]) J a n i s z e w s k i: *Thèse* p. 7—8.

Premier cas. $(B \times C_1) - a \neq 0$. Soit alors $x \subset (B \times C_1) - a$. Désignons par $C_2$ la partie de $C_1$ entre $c$ et $x$, par $B_1$ la partie de $B$ entre $x$ et $b$. $B_1 + C_2$ est évidemment un $\mathfrak{C}(b + c, A)$, qui ne contient pas $a$. Mais d'après la supposition un tel ensemble n'existe pas.

Second cas. $B \times C_1 = a$. Alors, $B$ et $C_1$ étant des arc simples, $B + C_1$ est un arc simple contenu dans $A$, contenant $B$ et différent de $B$. Donc $B$ n'est pas un arc simple saturé de $A$, contrairement à la supposition. Notre lemme est ainsi démontré.

**9. Lemme.** Prémisses: 1) $A_1$, $A_2$ sont deux arcs simples coextrémales; 2) $A_1 \neq A_2$. Thèse: $A_1 + A_2$ contient une ligne simple fermée.

Démonstration. $A_1 \neq A_2$ entraîne

$$A_1 - A_2 = A_1 - (A_1 \times A_2) \neq 0, \tag{11}$$

$A_1 \times A_2$ étant fermé et contenant les extremités de $A_1$. D'après la définition d'un arc simple il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre $A_1$ et un segment de droite $K$. Soit $K_1$ l'image de $A_1 \times A_2$ dans $K$; c'est un ensemble fermé contenant les extrémités de $K$. $K - K_1$ est l'image de $A_1 - A_2$, donc en vertu de (11), $K - K_1 \neq 0$. $K$ contient par suite un segment $L$ contigu à $K_1$. L'image de $L$ dans $A_1$ est un arc simple $B_1$, aux extrémités $b$ et $c$. Comme $b$ et $c$ correspondent aux extrémités de $L$ et ces dernières sont contenu dans $K_1$, — on a:

$$b + c \subset A_1 \times A_2 \subset A_2, \tag{12}$$

$A_2$ contient un arc simple $B_2$ aux extremités $b$ et $c$. On a:

$$B_1 + B_2 \subset A_1 + A_2, \tag{13}$$

$$b + c \subset B_1 \times B_2 \tag{14}$$

Soit $x$ un point de $B_1 - (b + c)$, — il correspondt à un point intérieur (par rapport à $K$) du segment $L$, donc à un point de $K - K_1$. Par suite $x \subset A_1 - A_2$ c. à. d. $x$ n'est pas contenu dans $B_2$. Donc $B_1 \times B_2 = b + c$, — les arcs simples $B_1$ et $B_2$ n'ont que les extrémités en commun et $B_1 + B_2$ est une ligne simple fermée [1]), contenu dans $A_1 + A_2$ (en vertu de (13)). Le lemme est ainsi démontré.

[1]) L. c. p. 62.

**10. Lemme.** Prémisses: 1) $A$ est une ligne de Jordan; 2) $A$ ne contient aucune ligne simple fermée. Thèses: 1) $x, y$ étant deux points de $A$, $A$ ne contient qu'un seul arc simple aux extremités $x$ et $y$ — nous le désignerons par $xy$. 2) Tout sous-ensemble continu de $A$ est une ligne de Jordan. 3) Tout sous-ensemble continu de $A$, contenant les points $x$ et $y$ contient $xy$.

Démonstration: La thèse 1) est une conséquence immédiate de **9.**

Soit $B$ un sous-ensemble continu de $A$. Supposons, que $B$ contient un point $a$ de second genre et posons [1]):

$$\sigma_B(a) = 3\lambda, \tag{15}$$

$A$ étant une ligne de Jordan on peut déterminer $\varepsilon > 0$ de manière, que pour tout couple de points $x, y$ de $A$ assujétis à la condition:

$$\varrho(x, y) \leqq \varepsilon, \tag{16}$$

il existe un arc simple contenu dans $A$, aux extrémités $x$ et $y$, et de diamétre $\leqq \lambda$ [2]). Comme d'aprés la thèse 1) $A$ ne contient qu'un seul arc simple aux extrémités $x, y$ que nous avons désigné par $xy$, (16) entraîne:

$$\delta(xy) \leqq \lambda. \tag{17}$$

D'après (15) on peut déterminer de points $a_1$, $a_2$ de $B$ de manière que l'on ai:

$$\begin{aligned} \varrho(a, a_1) &\leqq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \varrho(a, a_2) &\leqq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\delta\,[\mathfrak{C}(a_1 + a_2, B)] > 2\lambda. \tag{19}$$

pour tout $\mathfrak{C}(a_1 + a_2, B)$. Les inégalités (18) entraînent $\varrho(a_1, a_2) \leqq \varepsilon$. donc:

$$\delta(a_1 a_2) \leqq \lambda. \tag{20}$$

On a certainement $a_1 a_2 - B \neq 0$; en effet dans le cas contraire $a_1 a_2$ serait contenu dans $B$ il existerait donc un $\mathfrak{C}(a_1 + a_2, B)$, —

[1]) **Mazurkiewicz** l. c. **11.**

[2]) L. c. 44, III.

savoir $a_1 a_2$, assujéti à l'inégalité (20), donc ne vérifiant pas l'inégalité (19). Soit:

$$b \subset a_1 a_2 - B, \tag{21}$$

$$\varrho(b, B) = \beta. \tag{22}$$

$A$ étant une ligne de Jordan on peut déterminer $\varepsilon_1 > 0$ de manière que pour tout couple de points $x, y$ de $A$, assujétis à la condition:

$$\varrho(x, y) \leqq \varepsilon_1, \tag{23}$$

il existe un arc simple contenu dans $A$, aux extrémités $x, y$ et de diamètre $\leqq \frac{\beta}{2}$. Comme d'après la thèse 1) $A$ ne contient qu'un seul arc simple aux extrémités $x, y$, que nous avons désigné par $xy$, (23) entrîne:

$$\delta(xy) \leqq \frac{\beta}{2}, \tag{24}$$

$B$ etant un continu contenant $a_1$ et $a_2$, on peut déterminer dans $B$ une suite de points: $a_1 = x_1 \; x_2 \ldots x_k = a_2$, telle que:

$$\varrho(x_i, x_{i+1}) \leqq \varepsilon_1 \qquad i = 1, 2 \ldots k-1. \tag{25}$$

L'ensemble:

$$C = \sum x_i x_{i+1}, \tag{26}$$

est une ligne de Jordan, contenant $a_1$ et $a_2$, donc contenant un arc simple aux extrémités $a_1, a_2$. Cet arc simple est identique à $a_1 a_2$, en vertu de la thèse 1) et de $C \subset A$. Donc:

$$b \subset a_1 a_2 \subset C. \tag{27}$$

Il existe donc un entier $l \leqq k-1$ tel que $b \subset x_l x_{l+1}$. Comme (23) entraîne (24), on a en vertu de de (25) pour $i = 1, 2 \ldots k-1$, et en particulier pour $i = l$

$$\delta(x_l x_{l+1}) \leqq \frac{\beta}{2}, \tag{28}$$

donc, en tenant compte de $x_l \subset B$:

$$\varrho(b, B) \leqq \varrho(b, x_l) \leqq \delta(x_l x_{l+1}) \leqq \frac{\beta}{2} \tag{29}$$

en contradiction avec (22).

On voit, que $B$ ne contient aucun point de second genre tous les points de $B$ sont de premier genre et la thèse 2) est démontrée.

$B$ désignant encore un sous-ensemble continu de $A$, supposons $x+y \subset B$. D'après 2) $B$ est une ligne de Jordan, contient donc un arc simple aux extrémités $x$ et $y$. En vertu de $B \subset A$ et de la thèse 1) cet arc simple est identique à $xy$, — donc:

(30) $$xy \subset B$$

et la thèse 3) est démontré.

**11. Lemme.** Prémisses: 1) $A$ est une ligne de Jordan; 2) $A$ ne contient aucune ligne simple fermée; 3) $a_n \subset A$, pour $n=0,1..$; 4) $a_0 \neq a_n$, $n=1,2...$; 5) $a_0 a_n \subset a_0 a_{n+1}$, $n=1,2...$; Thèse: $\overline{\Sigma a_0 a_n}$ est un arc simple.

Démonstration. Le lemme est évident si à partir d'un entier $p$ — tous les points de la suite $\{a_n\}$ sont identiques. Dans le cas contraire posons: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $b_{k+1}$ — identique au premier point de la suite $\{a_n\}$ pour lequel $a_0 a_n \supset b_0 b_k$ et $a_n \neq b_k$ $(k=1,2...)$. Le point $b_k$ est alors situé sur l'arc $b_0 b_{k+1}$ et différent de $b_0$ et de $b_{k+1}$, donc [1]):

(32) $$b_0 b_{k+1} = b_0 b_k + b_k b_{k+1} \qquad b_0 b_k \times b_k b_{k+1} = b_k$$

(32) $$\overline{\sum a_0 a_n} = \overline{\sum_{k \geqq 1} b_0 b_k} = \overline{\sum_{k \geqq 0} b_k b_{k+1}} = \sum_{k \geqq 0} b_k b_{k+1} + H,$$

en désignant par $H$ l'ensemble d'accumulation de la suite $\{b_k b_{k+1}\}$ [2]). Je dis, que $H$ se réduit à un seul point. Soit $b$ un point limite de la suite $\{b_n\}$. On a:

(33) $$lim\ \varrho(b, b_n) = 0.$$

Supposons, qu'il existe un point $b \subset H - b$. On aura

(34) $$lim\ \varrho(c, b_n b_{n+1}) = 0.$$

Posons: $\varrho(b, c) = 4\alpha$ et déterminons $2\beta$ de manière que l'inégalité: $\varrho(x, y) \leqq 2\beta$ entraîne pour $x+y \subset A$ l'inégalité:

(35) $$\delta(xy) \leqq \alpha.$$

D'après (33) il existe un entier $q$ tel que:

(36) $$\varrho(b, b_q) \leqq \beta < \alpha.$$

[1]) Janiszewki l. cr 51.

[2]) L. c. p. 15 sq

D'après (34) il existe un entier $r \geqq q$ et un point $c_1 \subset b_r b_{r+1}$ tel que:

(37) $$\varrho(c, c_1) \leqq \alpha.$$

D'aprés (33) il existe un entier $s \geqq q+1$ tel que:

(38) $$\varrho(b, b_s) \leqq \beta,$$

(36) et (38) entraînent:

(39) $$\varrho(b_q, b_s) \leqq 2\beta,$$

donc, d'après la définition de $\beta$:

(40) $$\delta(b_q b_s) \leqq \alpha.$$

D'autre part on a, en vertu de (36), (37):

(41) $$\varrho(b_q, c_1) \geqq 2\alpha.$$

En partant de (31) on obtient facilement:

(42) $$b_r + b_{r+1} \subset b_q b_s,$$

donc, en vertu de **10**:

(43) $$b_r b_{r+1} \subset b_q b_s.$$

(44) $$c_1 \subset b_q b_s,$$

(45) $$\delta(b_q b_s) \geqq \varrho(b_q, c_1) \geqq 2\alpha,$$

en contradiction avec (40). Donc: $H - b = 0$, c. à. d.

(46) $$H \doteq b,$$

d'ou en particulier:

(47) $$\lim_{k=\infty} b_k = b.$$

Je dis. que $b$ n'est pas contenu dans $\sum_{k \geqq 0} b_k b_{k+1}$. Supposons le contraire. On a alors pour une valeur $q$ de l'indice $k$: $b \subset b_q b_{q+1}$. Alors:

(48) $$b \neq b_{q+2}.$$

Posons $\varrho(b, b_{q+2}) = 2\gamma$ et déterminons $\delta > 0$ de manière, que $\varrho(x,y) \leqq \delta$ entraîne pour $x + y \subset A$:

(49) $$\delta(xy) \leqq \gamma.$$

D'après (47) on peut déterminer un entier $s$ tel que:

(50) $$\varrho(b, b_s) \leqq \delta\,; \qquad s \geqq q+2,$$

donc:

$$\delta(bb_s) \leqq \gamma. \tag{51}$$

On a en vertu de (1) et de $q < q+2 \leqq s$:

$$b_{q+2} \subset b_q b_s. \tag{52}$$

Donc, si $b_q = b$:

$$b_{q+2} \dot{\subset} bb_s. \tag{53}$$

Si $b_q \neq b$, on a:

$$b_q b_s = b_q b + bb_s \qquad b_q b \times bb_s = b \tag{54}$$

et, en vertu de **10**:

$$b_q b \subset b_q b_{q+1}. \tag{54}$$

Comme $b_{q+2}$ n'est pas contenu dans $b_q b_{q+1}$, il n'est pas contenu à fortiori dans $b_q b$. Donc, dans ce cas encore on a (53). Mais (53) entraîne:

$$\delta(bb_s) \geqq \varrho(b, b_{q+2}) = 2\gamma, \tag{56}$$

contrairement à (51). On voit donc que $b$ n'est pas contenu dans $\Sigma b_k b_{k+1}$.

L'ensemble:

$$\overline{\sum a_0 a_n} = \sum_{k \geqq 0} b_k b_{k+1} + b, \tag{57}$$

est un continu contenant $a_0 = b_0$ et $b$ et contenu dans $A$. Donc, d'après **10**:

$$\overline{\sum a_0 a_n} \supset b_0 b. \tag{58}$$

Supposons $\overline{\Sigma a_0 a_n} - b_0 b \neq 0$ et soit:

$$c' \subset \overline{\sum a_0 a_n} - b_0 b. \tag{59}$$

Il existe un entier $p$ tel que:

$$c' \subset b_p b_{p+1}. \tag{60}$$

Soit $k > 1$; alors $c' \neq b_k$; comme d'autre part $c' \neq b_0$, on a:

$$b_0 b_k = b_0 c' + c' b_k \qquad b_0 c' \times c' b_k = c', \tag{61}$$

$$\overline{\sum a_0 a_n} = b_0 c' + \overline{\sum_{k>p+1} c' b_k} = b_0 c' + \left(\sum_{k>p+1} c' b_k + b\right), \tag{62}$$

$$b_0 c' \times \overline{\sum_{k>p+1} c' b_k} = \sum_{k>p+1} (b_0 c' \times c' b_k) + (b \times b_0 c') = c', \tag{63}$$

en vertu de (61) et de ce que $b$ n'est pas contenu dans $b_0 c'$. (58) (59), (62), (63) entraînent:

$$b_0 b = (b_0 b \times b_0 c') + \left(b_0 b \times \overline{\sum_{k>p+1} c' b_k}\right). \tag{64}$$

$$(b_0 b \times b_0 c') \times \left(b_0 b \times \overline{\sum_{k>p+1} c' b_k}\right) = \tag{65}$$

$$= b_0 b \times \left(b_0 c' \times \overline{\sum_{k>p+1} c' b_k}\right) = b_0 b \times c' = 0.$$

Les ensembles $(b_0 b \times b_0 c')$ et $\left(b_0 b \times \overline{\sum_{k>p+1} c' b_k}\right)$ sont fermés, non vides (puisque le premier contient $b_0$, le second $b$) et n'ont pas de points communs. Donc on peut décomposer le continu $b_0 b$ en une somme de deux sous-ensembles fermés, non vides, sans points communs, — ce qui est absurde. Donc $\overline{\sum a_0 a_n} - b_0 b = 0$, c. à. d.:

$$\overline{\sum a_0 a} = b_0 b \tag{66}$$

et notre lemme est démontré

**12. Lemme.** Prémisses: 1) $A$ est une ligne de Jordan; 2) $A$ ne contient aucune ligne simple fermée; 3) pour $n = 1, 2 \ldots$ $J_n$ est un arc simple contenu dans $A$; 4) $J_n \subset J_{n+1}$. Thèse: $\overline{\sum J_n}$ est un arc simple.

Démonstration. Désignons par $a_1$, $b_1$ les extrémités de $J_1$, par $c$ un point de $J_1 - (a_1 + b_1)$, par $a_n$, $b_n$ les extremités de $J_n (n > 1)$. On a:

$$J_n = a_n c + c b_n \qquad a_n c \times b_n c = c \tag{67}$$

et en permutant convenablement les lettres $a$, $b$ en cas de besoin, on peut toujours obtenir, que:

$$a_1 \subset c a_n, \qquad b_1 \subset c b_n, \tag{68}$$

d'où résulte par un raisonnement facile:

(69) $$a a_n \subset c a_{n+1}; \qquad c b_n \subset c b_{n+1}.$$

Donc, d'après **11** on a (comp. (67), (66)):

(70) $$\overline{\sum c a_n} = ca = \sum c a_n + a,$$

(71) $$\overline{\sum b a_n} = cb = \sum c b_n + b,$$

(72) $$\overline{\sum J_n} = ca + cb.$$

En vertu de (67), (70), (71)

(73) $$ca \times cb \subset \sum_{k,\, n} (c a_k \times c b_n) + a + b = a + b + c.$$

Supposons que $ca \times cb \supset a$; alors $cb \supset a$ et comme $cb \supset c$, on aurait en vertu de **10**:

(74) $$ca \subset cb,$$

(75) $$ca \times cb \supset ca,$$

résultat absurde, car $ca \times cb$ peut d'après (73) contenir trois points au plus, et $ca$ en contient une infinité. Donc $a$ n'est pas contenu dans $ca \times cb$. Il en est de même pour $b$, donc:

(76) $$ca \times cb = c,$$

(72) et (76) entraînent [1]):

(77) $$\overline{\sum J_n} = ab$$

et le lemme est démontré.

**13. Lemme.** Prémisses: 1) $A$ est une ligne de Jordan; 2) $A$ ne contient aucune ligne simple fermée; 3) $B$ est un arc simple contenu dans $A$. Thèse: Il existe un arc simple saturé de $A$, contenant $B$.

Démonstration. Ce lemme n'est qu'un cas particulier, d'une proposition générale sur l'existence d'ensembles saturés, que j'ai

[1]) L. c. p. 53.

donné ailleurs [1]). En effet, si nous remplaçons dans l'énoncé de cette proposition les mots „propriété $P$" par les mots: „propriété d'être un arc simple contenu dans $A$« — sa thèse devient identique avec celle de notre lemme et ses prémisses sont vérifiées, en vertu de **12** et de la prémisse 3) de notre lemme.

**14. Démonstration de 5.** Si $A$ contient une ligne simple fermée $B$ il existe d'après **6** une infinité de points de $A$ qui ne le découpent pas, savoir tous les points de $B$, sauf un ensemble au plus dénombrable. Si $A$ ne contient aucune ligne simple fermée, soit $B$ un arc simple contenu dans $A$. D'après **13** il existe un arc simple saturé de $A$, contenant $B$. Désignons par $a$, $b$ les extrémités de cet arc. D'après **8** ces deux points ne découpent pas $A$. Notre théorème est ainsi démontré.

**15. Remarques.** Il est aisé de démontrer par des exemples que l'ensemble de points qui ne découpent pas une ligne de Jordan $A$, peut être non dénombrable et même de seconde catégorie par rapport à $A$, aussi dans le cas où $A$ ne contient aucune ligne simple fermée.

Les lemmes **10** et **13** montrent que les lignes de Jordan qui ne contiennent aucune ligne simple fermée, forment une classe à part qu'il serait peut être intéressant d'étudier. La proposition suivante p. e. me paraît probable: une ligne de Jordan situé dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions et ne contenant aucune ligne simple fermée est homéomorphe avec un ensemble plan.

[1]) Mazurkiewicz l. c. 38.

Varsovie, 24 Avril 1920.