Sur l'invariance de la notion d'ensemble $F_{\sigma\delta}$.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Je ne considère, que les ensembles bornés, situés dans des espaces euclidiens à un nombre quelconque de dimensions.

2. Théorème. Prémisses: 1) A est un ensemble $F_{\sigma\delta}$. 2) B est homéomorphe avec A. Thèse: B est un ensemble $F_{\sigma\delta}$ [1]).

3. Nous convenons de remplacer par 0 toute somme de la forme $\sum\limits_{i=i_1}^{i_2}$, où $i_1 > i_2$.

4. $r_1 \dots r_n$ et $r'_1 \dots r'_n$ étant deux suites de nombres naturels, les symboles:

$$(r_1 \dots r_n) = (r'_1 \dots r'_n), \tag{1}$$

$$(r_1 \dots r_n) > (r'_1 \dots r'_n) \tag{2}$$

signifient: (1) que $r_i = r'_i$ pour $i = 1, \dots n$; (2) — que l'on a $r_i \neq r'_i$ pour une au moins valeur de $i \leqq n$ et que la première de différences $r_i - r'_i$ qui ne s'évanuit pas est positive.

5. On a en vertu de la prémisse 1):

$$A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i, \tag{3}$$

$$A_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \tag{4}$$

[1]) V. Sierpiński: C. R. t. 171 (note du 5 juillet 1920), p. 24. D'après le théorème géneral de M. Sierpiński on peut affirmer seulement, qu'un ensemble homéomorphe avec un ensemble $F_{\sigma\delta}$, est un $F_{\sigma\delta}$ ou bien un $G_{\delta\sigma\delta}$.

les A_{ik} étant fermés. On peut evidémment supposer, que:

(5) $$A_{i+1} \subset A_i.$$

6. Déterminons pour tout n naturel et pour toute suite: $r_1 \ldots r_n$ de n nombres naturels un ensemble fermé $C(r_1 \ldots r_n)$ de manière suivante:

I. $C(r_1) = A_{1, r_1}$.

II. Supposons les $C(r_1 \ldots r_n)$ déterminés pour $n \leqq m$. Posons:

(6) $$D(r_1, r_2 \ldots r_m) = \sum_{r=1}^{r_1-1} C(r) + \sum_{s=2}^{m} \left[\sum_{r=1}^{r_s-1} C(r_1 \ldots r_{s-1}, r)\right],$$

(7) $$G(r_1 \ldots r_m) = A_{m-1} \times [C(r_1 \ldots r_m) - D(r_1 \ldots r_m)]$$

(6) est fermé, étant l'ensemble somme d'un nombre fini d'ensembles fermés; (7) est l'ensemble de points communs de deux ensembles F_σ (car la différence de deux ensembles fermés est un F_σ), donc un F_σ c. à. d. la somme d'une suite d'ensembles fermés. Le r_{m+1}-ème de ces ensembles est précisément $C(r_1 \ldots r_m \,.\, r_{m+1})$. On a d'après cette définition:

(8) $$G(r_1 \ldots r_m) = \sum_{r_{m+1}=1}^{\infty} C(r_1 \ldots r_m, r_{m+1})$$

et en vertu de (7), (8):

(9) $$C(r_1 \ldots r_m, r_{m+1}) \times D(r_1 \ldots r_m) = 0.$$

7. On a pour tout m:

(10) $$A_m = \sum C(r_1 \ldots r_m) \qquad r_s = 1, 2 \ldots; \; s = 1 \ldots m.$$

Cette relation est vérifiée pour $m = 1$, en vertu de (4) et de I. Pour $m = 2$ elle devient

(11) $$A_2 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \sum_{r_2=1}^{\infty} C(r_1, r_2) = \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\sum_{r_2=1}^{\infty} C(r_1, r_2)\right) = \sum_{r_1=1}^{\infty} G(r_1) =$$
$$= A_2 \times \sum_{r_1=1}^{\infty} \left[C(r_1) - \sum_{r=1}^{r_1-1} C(r)\right] = A_2 \times \sum_{r_1=1}^{\infty} C(r_1) = A_2 \times A_1$$

elle est donc vérifiée, en vertu de (5). Il suffit maintenant de montrer, que pour $m > 1$, (10) entraîne:

$$(12)\qquad A_{m+1} = \sum C(r_1, \ldots r_{m+1}) \qquad r_s = 1, 2 \ldots;\ s = 1 \ldots m+1$$

En remplaçant dans (6) m par $m-1$, on obtient:

$$(13)\qquad D(r_1 \ldots r_m) = D(r_1 \ldots r_{m+1}) + \sum_{r=1}^{r_m-1} C(r_1 \ldots r_{m-1}, r),$$

$$(14)\qquad G(r_1 \ldots r_m) =$$

$$= A_{m+1} \times \left\{ [C(r_1 \ldots r_m) - D(r_1 \ldots r_{m-1})] - \sum_{r=1}^{r_m-1} C(r_1 \ldots r_{m-1}, r) \right\} =$$

$$= A_{m+1} \times \left[C(r_1 \ldots r_m) - \sum_{r=1}^{r_m-1} C(r_1 \ldots r_{m-1}, r) \right],$$

en vertu de (9). En utilisant (5), (8), (14) et (10) on obtient:

$$(15)\qquad \sum \left[\sum_{r_{m+1}=1}^{\infty} C(r_1 \ldots r_{m+1}) \right] = \sum G(r_1 \ldots r_m) =$$

$$= A_{m+1} \times \sum \left[C(r_1 \ldots r_m) - \sum_{r=1}^{r_m-1} C(r_1 \ldots r_{m-1}, r) \right] =$$

$$= A_{m+1} \times \sum C(r_1 \ldots r_m) = A_{m+1} \times A_m = A_{m+1}$$

$$r_s = 1, 2 \ldots;\ s = 1 \ldots m$$

ce qui est précisément (12). Donc (10) est démontré.

8. D'après la prémisse 2) il existe entre A et B une correspondance biunivoque et bicontinue. Elle fait correspondre à tout point $x \subset B$ un point $\varphi(x) \subset A$. Soit $H(r_1 \ldots r_m)$ l'ensemble de tous les points $x \subset B$, pour lesquels $\varphi(x) \subset D(r_1 \ldots r_m)$ et $K(r_1 \ldots r_m)$ l'ensemble de tous les points $x \subset B$, pour lesquels $\varphi(x) \subset C(r_1 \ldots r_m)$. Posons pour $m = 1, 2 \ldots$:

$$(16)\qquad L(r_1 \ldots r_{m+1}) = \overline{K(r_1 \ldots r_{m+1})} - \overline{H(r_1 \ldots r_m)},$$

$$(17)\qquad N_{m+1} = \sum L(r_1 \ldots r_{m+1}) \qquad r_s = 1, 2 \ldots\ s = 1 \ldots m+1$$

$$(18)\qquad N = \prod_{m=1}^{\infty} N_{m+1}.$$

9. (3) et (12) entraînent:

(19) $$A = \sum [A \times C(r_1 \dots r_m)] \quad r_s = 1, 2 \dots; \; s = 1 \dots m,$$

donc, d'après la définition de $K(r_1 \dots r_m)$

(20) $$B = \sum K(r_1 \dots r_m) \quad r_s = 1, 2 \dots; \; s = 1 \dots m.$$

D'autre part $D(r_1 \dots r_m)$ étant fermé, on a en vertu de (9):

(21) $$[A \times C(r_1 \dots r_{m+1})] \times [\overline{A \times D(r_1 \dots r_m)}] \subset \subset C(r_1 \dots r_{m+1}) \times D(r_1 \dots r_m) = 0.$$

La correspondance entre A et B étant bicontinue et biunivoque il s'ensuit:

(22) $$K(r_1 \dots r_{m+1}) \times \overline{H(r_1 \dots r_m)} = 0,$$

(23) $$L(r_1 \dots r_{m+1}) \subset K(r_1 \dots r_{m+1}) - \overline{H(r_1 \dots r_m)} = = K(r_1 \dots r_{m+1}) - [K(r_1 \dots r_{m+1}) \times \overline{H(r_1 \dots r_m)}] = K(r_1 \dots r_{m+1}),$$

(17), (20), (23) entraînent:

(24) $$N_{m+1} \supset B,$$

donc, d'après (18):

(25) $$N \supset B.$$

10. D'après (7) et (8)

(26) $$C(r_1 \dots r_{m+1}) \subset G(r_1 \dots r_m) \subset C(r_1 \dots r_m)$$

donc:

(27) $$C(r_1 \dots r_m \dots r_{m+q}) \subset C(r_1 \dots r_m) \qquad q = 1, 2 \dots$$

Il s'ensuit:

(28) $$K(r_1 \dots r_m \dots r_{m+q}) \subset K(r_1 \dots r_m).$$

La relation (13), si l'on y change m en $m+1$, entraîne:

(29) $$D(r_1 \dots r_{m+1}) \supset D(r_1 \dots r_m),$$

(30) $$H(r_1 \dots r_{m+1}) \supset H(r_1 \dots r_m),$$

(31) $$\overline{H(r_1 \dots r_{m+1})} \supset \overline{H(r_1 \dots r_m)}$$

et par suite:

(32) $$\overline{H(r_1 \dots r_m \dots r_{m+q})} \supset \overline{H(r_1 \dots r_m)}.$$

11. (16), (28), (31) entraînent:

$$(33) \qquad L(r_1 \dots r_{m+2}) = \overline{K(r_1 \dots r_{m+2})} - \overline{H(r_1 \dots r_{m+1})} \subset$$
$$\subset \overline{K(r_1 \dots r_{m+1})} - \overline{H(r_1 \dots r_{m+1})} \subset$$
$$\subset \overline{K(r_1 \dots r_{m+1})} - \overline{H(r_1 \dots r_m)} = L(r_1 \dots r_{m+1}),$$

donc, on aura généralement:

$$(34) \qquad L(r_1 \dots r_{m+1} \dots r_{m+q+1}) \subset L(r_1 \dots r_{m+1}).$$

12. D'après (6) on a pour $r_1' < r_1$

$$(35) \qquad C(r_1') \subset D(r_1),$$

$$(36) \qquad K(r_1') \subset H(r_1),$$

$$(37) \qquad \overline{K(r_1')} \subset \overline{H(r_1)}.$$

Pour $p > 1$, $r_p' < r_p$ on a de même en vertu de (6):

$$(38) \qquad C(r_1 \dots r_{p-1}, r_p') \subset D(r_1 \dots r_{p-1}, r_p),$$

$$(39) \qquad K(r_1 \dots r_{p-1}, r_p') \subset H(r_1 \dots r_{p-1}, r_p),$$

$$(40) \qquad \overline{K(r_1 \dots r_{p-1}, r_p')} \subset \overline{H(r_1 \dots r_{p-1}, r_p)}.$$

13. Considérons maintenant deux suites: $r_1 \dots r_m$ et $r_1' \dots r_m'$ et supposons que:

$$(41) \qquad (r_1' \dots r_m') < (r_1 \dots r_m).$$

Soit p le premier nombre $\leqq m$, tel que $r_p - r_p' \neq 0$; d'après (41) $r_p > r_p'$. Si $p = 1$, on a $r_1 > r_1'$. donc, en utilisant (28), (32), (37) on aura:

$$(42) \qquad \overline{K(r_1' \dots r_m')} \subset \overline{K(r_1')} \subset \overline{H(r_1)} \subset \overline{H(r_1 \dots r_m)}.$$

Si $p > 1$, on peut écrire la suite $r_1' \dots r_m'$ dans la forme: $r_1 \dots r_{p-1}$, $r_p' \dots r_m'$ et on aura en utilisant (28), (32), (40):

$$(43) \qquad \overline{K(r_1' \dots r_m')} \subset \overline{K(r_1' \dots r_p')} =$$
$$= \overline{K(r_1 \dots r_{p-1}, r_p)} \subset \overline{H(r_1 \dots r_{p-1}, r^p)} \subset \overline{H(r_1 \dots r_m)}.$$

Donc (41) entraîne dans tous les cas:

$$\overline{K(r_1' \dots r_m')} \subset \overline{H(r_1 \dots r_m)}.$$

14. (16) entraîne:

$$L(r'_1 \dots r'_{m+1}) \subset \overline{K(r'_1 \dots r'_{m+1})}, \tag{45}$$

$$\overline{L(r_1 \dots r_{m+1}, r_{m+2})} \times \overline{H(r_1 \dots r_{m+1})} = 0. \tag{46}$$

Supposons, que:

$$(r'_1 \dots r'_{m+1}) < (r_1 \dots r_{m+1}) \tag{47}$$

on aura d'après les résultats de **13**:

$$L(r'_1 \dots r'_{m+1}) \subset \overline{H(r_1 \dots r_{m+1})}, \tag{48}$$

(46) et (48) entraînent:

$$L(r'_1 \dots r'_{m+1}) \times L(r_1 \dots r_{m+1}, r_{m+2}) = 0. \tag{49}$$

On voit donc, que (47) entraîne (49). D'après (34) — (47) entraîne à fortiori:

$$L(r'_1 \dots r'_{m+2}) \times L(r_1 \dots r_{m+2+q}) = 0 \qquad q = 1, 2 \dots \tag{50}$$

15. Supposons maintenant:

$$(r'_1 \dots r'_{m+1}) > (r_1 \dots r_{m+1}), \tag{51}$$

on aura, d'après **14**:

$$L(r'_1 \dots r'_{m+2}) \times L(r_1 \dots r_{m+1}) = 0 \tag{52}$$

donc, en tenant compte de (34):

$$L(r'_1 \dots r'_{m+2}) \times L(r_1 \dots r_{m+2+q}) = 0 \qquad q = 1, 2 \dots \tag{53}$$

16. Les résultats de **14** et **15** peuvent être énoncé de manière suivante. Si pour un couple de nombres naturels m, q on a:

$$L(r'_1 \dots r'_{m+2}) \times L(r_1 \dots r_{m+2+q}) \neq 0, \tag{54}$$

il en résulte:

$$(r'_1 \dots r'_{m+1}) = (r_1 \dots r_{m+1}). \tag{55}$$

17. Supposons, que l'on a:

$$N - B \neq 0 \tag{56}$$

et soit $x \subset N - B$. En vertu de (18) on a:

$$x \subset N_{m+2} \qquad m = 1, 2 \dots \tag{57}$$

Donc pour toute valeur de m il existe une suite: $r_1^{(m)}, r_2^{(m)} \dots r_{m+2}^{(m)}$ telle que:

$$x \subset L(r_1^{(m)} \dots r_{m+2}^{(m)}) \subset \overline{K(r_1^{(m)} \dots r_{m+2}^{(m)})} \subset \overline{K(r_1^{(m)} \dots r_m^{(m)})}. \tag{58}$$

Pour tout couple d'entiers m, q on a ainsi:

$$L(r_1^{(m)} \dots r_{m+2}^{(m)}) \times L(r_1^{(m+q)} \dots r_{m+q+2}^{(m+q)}) \supset x, \tag{59}$$

$$L(r_1^{(m)} \dots r_{m+2}^{(m)}) \times L(r_1^{(m+q} \dots r_{m+q+2}^{(m+q)}) \neq 0, \tag{60}$$

donc suivant 16 on a:

$$(r_1^{(m)} \dots r_{m+1}^{(m)}) = (r_1^{(m+q)} \dots r_{m+1}^{(m+q)}). \tag{61}$$

Posons: $r_m^{(m)} = t_m$, on aura alors, en vertu de (61):

$$r_m^{(m+q)} = t_m \qquad q = 0, 1 \dots \tag{62}$$

donc, en remplaçant m par k et $m+q$ par m:

$$r_k^{(m)} = t_k \qquad k = 1 \dots m, \tag{63}$$

$$\overline{K(_1^{(m)} \dots r_m^{(m)})} = \overline{K(t_1 \dots t_m)}, \tag{64}$$

$$x \subset \overline{K(t_1 \dots t_m)} \qquad m = 1, 2 \dots \tag{65}$$

$K(t_1 \dots t_m)$ est contenu dans B, donc x n'est pas un point de $K(t_1 \dots t_m)$. C'est donc un point limite de cet ensemble, il existe par suite un point x_m tel que:

$$x_m \subset K(t_1 \dots t_m), \tag{66}$$

$$\varrho(x_m, x) \leqq \frac{1}{m}. \tag{67}$$

Soit y un point limite de la suite $\{\varphi(x_m)\}$. Ce point n'appartient pas à A. En effet, si $y \subset A$ il existe un point $x' \subset B$ tel que $y = \varphi(x')$. D'après la définition de y on a pour une suite convenable d'entiers $\{m\}$:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(x_{m_n}) = \varphi(x') \tag{68}$$

donc, la correspondance entre A et B étant bicontinue:

$$\lim_{n=\infty} x_{m_n} = x'. \tag{69}$$

D'autre part (67) entraîne

$$\lim_{m=\infty} x_m = x. \tag{70}$$

Il en résulte $x' = x$ et $x \subset B$, contrairement à la supposition. (66) entraîne:

$$\varphi(x_m) \subset C(t_1 \dots t_m) \tag{71}$$

donc, en remplaçant m par $m+q$ et en utilisant (27):

$$\varphi(x_{m+q}) \subset C(t_1 \dots t_{m+q}) \subset C(t_1 \dots t_m) \qquad q = 1, 2 \dots \tag{72}$$

C. à. d. l'ensemble $C(t_1 \dots t_m)$ contient tous les éléments de la suite $\{\varphi(x_m)\}$, à partir du m-ème, donc, étant fermé il contient tous les points limites de cette suite, en particulier y. On a donc en tenant compte de (10)

$$y \subset C(t_1 \dots t_m) \subset A_m \qquad m = 1, 2 \dots \tag{73}$$

$$y \subset \prod_{m=1}^{\infty} A_m = A. \tag{74}$$

Mais nous venons de démontrer que y n'appartient pas à A. On voit ainsi, que la supposition (56) entraîne un contradiction. Donc:

$$N \subset B. \tag{75}$$

De (25) et (75) résulte:

$$B = N = \prod_{m=1}^{\infty} N_{m+1}. \tag{76}$$

18. Les ensembles (16) sont des différences de deux ensembles fermés, donc des F_σ. (17) montre, que N_{m+1} est l'ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles F_σ, et par suite un F_σ de même. Il en résulte, que B est d'après (76) un $F_{\sigma\delta}$, c. q. f. d.

16 Juin 1920.