Sur l'existence d'un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe, borné.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Cette note contient la solution d'un problème qui m'a été communiqué par M. Sierpiński.

2. R_2 désignera le plan euclidien.

3. Je ne considère que des ensembles situés dans un R_2.

4. Définition. Un ensemble est *punctiforme* s'il ne contient aucun continu.

5. Définition. D'après M. Hausdorff un ensemble A, contenant deux points au moins est *connexe* s'il n'existe aucune décomposition:

$$A = B + C, \tag{1}$$

$$B \neq 0, \quad C \neq 0, \quad B \times C = B \times C = 0. \tag{2}$$

6. Théorème: *Il existe dans R_2 un ensemble E connexe qui ne contient aucun sous-ensemble connexe borné.*

7. R_1 désignera l'ensemble de nombres réels.

8. Nous supposons établi dans le R_2 un système ξ, η de coordonnées cartésiennes. La droite $\xi = \alpha$ sera désignée par $D(\alpha)$.

9. Un ensemble A, ne contenant que des points intérieurs, sera appelé *domaine*. Posons:

$$A_c = R_2 - \bar{A}. \tag{3}$$

Si $A_c \neq 0$, c'est un domaine; dans ce cas nous dirons, que A est un *domaine normal* et A_c son *domaine complémentaire*.

10. A étant un domaine normal, nous dirons, que la droite D est une droite-secante de A, si:

(4) $$D \times A \neq 0, \quad D \times A_c \neq 0$$

et que la droite D est une droite-frontière de A, si:

(5) $$D \subset \bar{A} \times \bar{A}_c.$$

11. Lemme. Prémisses: A est un domaine normal, D une droite secante de A. Thèse: $D \times \bar{A} \times \bar{A}_c \neq 0$.

Démonstration. Soit p_1 un point de $D \times A$, p_2 un point de $D \times A_c$, S le segment de D, aux extremités p_1, p_2. D'après (3)

(6) $$R_2 = \bar{A} + \bar{A}_c,$$

(7) $$S = S \times R_2 = (S \times \bar{A}) + (S \times \bar{A}_c) \quad S \times \bar{A} \supset p_1; \; S \times \bar{A}_c \supset p_2$$

donc, S étant un continu et les ensembles $S \times \bar{A}$ et $S \times \bar{A}_c$ étant fermés:

(8) $$D \times \bar{A} \times \bar{A}_c \supset S \times \bar{A} \times \bar{A}_c = (S \times \bar{A}) \times (S \times \bar{A}_c) \neq 0$$

c. q. f. d,

12. Lemme. Prémisse: A est un domaine normal. Thèse: Parmi les droites $D(\alpha)$ une au moins est droite secante ou droite-frontière de A.

Démonstration. Supposons qu'aucune des droites $D(\alpha)$ n'est pas une droite-secante de A.

Je dis que dans ce cas la relation:

(9) $$D(\alpha) \times A_c \neq 0$$

entraîne:

(10) $$D(\alpha) \subset A_c.$$

En effet, supposons, que pour une valeur de α on a simultanément (9) et:

(11) $$D(\alpha) \times (R_2 - A_c) = D(\alpha) \times \bar{A} \neq 0.$$

Soit p_1 un point de $D(\alpha) \times A_c$, p_2 un point de $D(\alpha) \times \bar{A}$, η_1, η_2 — les ordonnées de ces deux points; leur abscisse est α. A_c étant un domaine, on peut déterminer $\delta > 0$ de manière, que

(12) $$\varrho(p, p_1) \leqq \delta$$

entraîne:

(13) $$p \subset A_c.$$

Comme $p_2 \subset \overline{A}$, il existe un point $p_3 \subset A$, tel que $\varrho(p_2, p_3) \leqq \delta$, Soient: β, η_3 l'abscisse et l'ordonnée de p_3 et désignons par p_4 le point: $\xi = \beta$, $\eta = \eta_1$. On a:

$$(14) \quad \varrho(p_1, p_4) = |\alpha - \beta| \leqq \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2} = \varrho(p_2, p_3) \leqq \delta$$

donc, comme (12) entraîne (13), $p_4 \subset A_c$. La droite $D(\beta)$ contient le point p_3 de A et le point p_4 de A_c, c'est donc une droite-secante de A, contrairement à la supposition.

Soit maintenant B_1 l'ensemble de nombres α pour lesquels $D(\alpha) \subset \overline{A}$, et B_2 l'ensemble de nombres α pour lesquels $D(\alpha) \subset A_c$. On a évidemment:

$$(15) \qquad R_1 = B_1 + B_2 = \overline{B}_1 + \overline{B}_2 \qquad B_1 \neq 0, \quad B_2 \neq 0$$

donc:

$$(16) \qquad \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 \neq 0.$$

Soit γ un point de $\overline{B}_1 \times \overline{B}_2$. Je dis que $D(\gamma)$ est une droite-frontière de A. Tout point de $D(\gamma)$, d'après la définition de γ, est point limite de points d'abscisse $\alpha \subset B_1$ — ces points sont contenus dans A — et, en même temps, point limite de points d'abscisse $\alpha \subset B_2$ — ces points sont contenus dans A_c. Donc:

$$(17) \qquad D(\gamma) \subset (\overline{A} \times \overline{A}_c) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

13. Désignons par I un intervalle quelconque et considérons l'ensemble de domaines $K(I)$ défini de manière suivante: le domaine A est un élément de l'ensemble $K(I)$ s'il est normal et si pour tout α contenu dans I la droite $D(\alpha)$ est droite-secante de A.

L'ensemble de tous les domaines à la puissance du contenu, donc $K(I)$ a au plus la puissance du continu. D'autre part, pour tout β réel l'ensemble défini par: $\eta > \beta$ est un domaine normal appartenant à $K(I)$; donc $K(I)$ contient un sous-ensemble de la puissance du continu. Il en résulte que $K(I)$ a la puissance du continu.

14. Définition de l'ensemble cherché. Rangeons en une suite infinie $\{I_n\}$ tous les intervalles à deux extremités rationnelles. Déterminons la suite d'ensembles $\{G_n\}$ de manière suivante: G_1 est parfait, punctiforme, contenu dans I_1; G_{n+1} est parfait, punctiforme, contenu dans $I_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} G_i$. Posons:

$$(18) \qquad H_1 = G_1 + \left(I_1 - \sum_{i=1}^{\infty} G_i\right),$$

$$(19) \qquad H_{n+1} = G_{n+1} + \left[\left(I_{n+1} - \sum_{i=1}^{\infty} G_i\right) - \sum_{i=1}^{n} H_i\right].$$

Les ensembles H_n et $K(I_n)$ ont même puissance — celle du continu: il existe donc entre leur éléments une correspondance biunivoque. A tout nombre $\alpha \subset H_n$ correspond un domaine $A^{(\alpha)} \subset K(I_n)$. D'après la définition même de G_n et d'après (18), (19), on a $H_n \subset I_n$, donc, d'aprés la définition de $K(I_n)$, pour $\alpha \subset H_n$, $D(\alpha)$ est une droite-secante de $A^{(\alpha)}$, donc, en vertu de **11**:

$$(20) \qquad D(\alpha) \times \overline{A^{(\alpha)}} \times \overline{A_c^{(\alpha)}} \neq 0.$$

Choisissons dans $D(\alpha) \times \overline{A^{(\alpha)}} \times \overline{A_c^{(\alpha)}}$ un point $p(\alpha)$ [1]), désignons par E_n l'ensemble de points $p(\alpha)$ pour $\alpha \subset H_n$ et posons:

$$(22) \qquad E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Je dis, que E est l'ensemble cherché. —

15. On a d'après **14** pour $k \geqq 1$

$$(22) \qquad G_n \times G_{n+k} \subset G_n \times \left[I_{n+k} - \sum_{i=1}^{n+k-1} G_i\right] \subset G_n \times [I_{n+k} - G_n] = 0,$$

$$(23) \qquad H_n \times H_{n+k} \subset \left[\left\{G_n + \left(I_n - \sum_{i=1}^{\infty} G_i\right)\right\} \times G_{n+k}\right] +$$

$$+ \left[H_n \times \left(I_{n+k} - \sum_{i=1}^{n+k-1} H_i\right)\right] \subset (G_n \times G_{n+k}) + [(I_n - G_{n+k}) \times G_{n+k}] +$$

$$+ [H_n \times (I_{n+k} - H_n)] = 0.$$

D'autre part:

[1]) Ce choix peut-être rendu effectif, l'ensemble

$$D(\alpha) \times \overline{A^{(\alpha)}} \times \overline{A_c^{(\alpha)}}$$

étant fermé.

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n = \sum_{n=1}^{\infty} H_n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{n=1}^{\infty} G_n + \tag{24}$$

$$+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_n - \sum_{i=1}^{\infty} G_i\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} H_i\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} H_i =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n + \sum_{n=1}^{\infty} I_n - \sum_{i=1}^{\infty} G_i = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = R_1 .$$

Les relations (23) et (24) montrent que tout nombre réel α est contenu dans un et un seul H_n. Il en résulte immédiatement, que le symbole $p(\alpha)$ est déterminé pour tout α réel et que:

$$D(\alpha) \times E = p(\alpha). \tag{25}$$

16. Soit p un point arbitraire, δ un nombre positif; désignons par ξ_1, η_1 les coordonnées de p. L'intervalle $\xi_1 - \delta < \xi < \xi_1 + \delta$ contient certainement un intervalle à extrémités rationnelles, soit I_k cet intervalle. Le domaine $\eta > \eta_1$ fait parti de $K(I_k)$, donc il est identique à $A^{(\beta)}$ pour une valeur $\beta \subset H_k \subset I_k$. L'ensemble $\overline{A^{(\beta)}} \subset \overline{A_c^{(\beta)}}$ se compose de la droite $\eta = \eta_1$ donc $D(\beta) \times \overline{A^{(\beta)}} \times \overline{A_c^{(\beta)}}$ se réduit au point $\xi = \beta$, $\eta = \eta_1$, ce point est par suite identique avec $p(\beta)$; comme $\xi_1 - \delta < \beta < \xi_1 + \delta$, on a:

$$\varrho(p, p(\beta)) = |\xi_1 - \beta| < \delta \tag{26}$$

δ étant arbitraire, on voit que tout point du plan est contenu dans E' c. a. d. E est dense dans R_2.

17. Soit L un sous-ensemble borné de E, contenant deux points au moins. Soit p_1, p_2 deux points de L. D'après **14**, **15**, on a: $p_1 = p(\alpha_1)$, $p_2 = p(\alpha_2)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. On peut supposer $\alpha_1 < \alpha_2$. L étant borné nous pouvons déterminer λ de manière que le cerle $\xi^2 + \eta^2 \leq \lambda^2$, que nous désignerons par S, contient L. Le point: $\xi = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, $\eta = 2\lambda$ est d'après **16** un point limite de E, le domaine $\alpha_1 < \xi < \alpha_2$, $\eta > \lambda$, contient, par suite, un point $p(\beta)$; en désignant par η' l'ordonnée de ce point, on a:

$$\alpha_1 < \beta < \alpha_2, \quad \eta' > \lambda. \tag{27}$$

Désignons par M le segment: $D(\beta) \times S$, c. à. d. le segment:

$\xi=\beta;\ -\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\leqq\eta\leqq\sqrt{\lambda^2-\beta^2}$; d'après (27) M ne contient pas $p(\beta)$, donc, d'après (25):

$$M\times E=0. \tag{28}$$

M découpe le cercle S en deux segments S_1 et S_2, tels que:

$$S_1\times S_2=M. \tag{29}$$

Posons: $L_1=L\times S_1$, $L_2=L\times S_2$; on a:

$$L_1+L_2=L\times(S_1+S_2)=L\times S=L, \tag{30}$$

$$L_1\neq 0\quad L_2\neq 0, \tag{31}$$

car, d'après (27), $p(\alpha_1)$ est contenu dans l'un, $p(\alpha_2)$ dans l'autre de ces deux ensembles. Enfin

$$\begin{aligned}\overline{L_1}\times L_2&=(\overline{L\times S_1})\times(L\times S_2)\subset\overline{S_1}\times(E\times S_2)=\\&=S_1\times S_2\times E=M\times E=0,\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}L_1\times\overline{L_2}&=(L\times S_1)\times(\overline{L\times S_2})\subset(E\times S_1)\times\overline{S_2}=\\&=S_1\times S_2\times E=M\times E=0.\end{aligned} \tag{33}$$

Les relations (30), (31), (32), (33) montrent que L n'est pas connexe. Donc E n e c o n t i e n t a u c u n s o u s - e n s e m b l e b o r n é, c o n n e x e.

18. Supposons maintenant, que E n'est pas connexe. Il existe alors une décomposition:

$$E=F_1+F_2, \tag{34}$$

$$F_1\neq 0,\quad F_2\neq 0,\quad \overline{F_1}\times F_2=F_1\times\overline{F_2}=0. \tag{35}$$

D'après (35), on a pour $p\subset F_1$:

$$\varrho(p,\overline{F_2})>0. \tag{36}$$

Désignons pour $p\subset F_1$, par $S(p)$ l'intérieur du cercle de centre p et de rayon $\frac{1}{2}\varrho(p,\overline{F_2})$, par A l'ensemble somme de tous les $S(p)$. A est un domaine et on a:

$$F_1\subset A, \tag{37}$$

$$F_2\times A=0, \tag{38}$$

$$R_2-A=\overline{R_2-A}\supset\overline{F_2}, \tag{39}$$

$$\overline{F_2}\times A=0. \tag{40}$$

Donc, en tenant compte de **16**:

$$(41)\qquad \overline{A} = \overline{(A \times R_2)} = \overline{(A \times \overline{E})} = \overline{[A \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)]} =$$
$$= \overline{[(A \times \overline{F}_1) + (A \times \overline{F}_2)]} = \overline{(A \times \overline{F}_1)},$$

$$(42)\qquad A \subset \overline{E} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2,$$

$$(43)\qquad A \subset \overline{F}_1 + (A \times \overline{F}_2) = \overline{F}_1,$$

$$(44)\qquad \overline{A} \subset \overline{F}_1$$

(44) et (35) entraînent:

$$(45)\qquad \overline{A} \times E_2 = 0,$$

$$(46)\qquad A_e = R_2 - \overline{A} \supset F_2,$$

donc A est un domaine normal. (37) et (46) entraînent:

$$(47)\qquad A_e \times \overline{F}_1 = 0$$

et en utilisant **16**, on obtient:

$$(48)\qquad A_e \subset \overline{E} = \overline{F}_1 + F_2,$$

$$(49)\qquad A_e \subset (\overline{F}_1 \times A_e) + \overline{F}_2 = \overline{F}_2,$$

$$(50)\qquad \overline{A}_e = \overline{(A_e \times \overline{E})} = \overline{[A_e \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2)]} =$$
$$= \overline{[(A_e \times \overline{F}_1) + (A_e \times \overline{F}_2)]} = \overline{(A_e \times \overline{F}_2)} \subset \overline{F}_2$$

donc, en vertu de (35):

$$(51)\qquad \overline{A}_e \times F_1 = 0$$

(45) et (51) entraînent:

$$(52)\qquad \overline{A} \times \overline{A}_e \times E = \overline{A} \times A_e \times (F_1 + F_2) =$$
$$= [\overline{A} \times (\overline{A}_e \times F_1)] + [\overline{A}_e \times (\overline{A} \times F_2)] = 0$$

A étant un domaine normal, deux cas sont possibles; d'après **12**:

I. Il existe une droite-frontière $D(\alpha)$ de A; alors:

$$(53)\qquad D(\alpha) \times E = p(\alpha),$$

$$(54)\qquad D(\alpha) \subset \overline{A} \times \overline{A}_e$$

donc l'ensemble $\overline{A} \times \overline{A}_e \times E$ n'est pas vide, puisqu'il contient le point $p(\alpha)$, ce qui est en contradiction avec (52).

II. Il existe une droite-secante $D(\alpha)$ de A. Soit p_1 un point de $D(\alpha) \times A$, et p_2 un point de $D(\alpha) \times A_c$. A et A_c étant des domaines, on peut déterminer $\varepsilon > 0$ de manière, que le inégalités:

$$(55) \qquad \varrho(p, p_1) \leqq \varepsilon,$$

$$(56) \qquad \varrho(p, p_2) \leqq \varepsilon$$

entraînent respectivement: $p \subset A$, $p \subset A_c$. On voit immédiatement, que pour $\alpha - \varepsilon \leqq \beta \leqq \alpha + \varepsilon$ $D(\beta)$ est une droite-secante de A. L'intervalle $\alpha - \varepsilon < \beta < \alpha + \varepsilon$ contient certainement un intervalle à extrémités rationnelles: $I_k . A$ fait partie de $K(I_k)$, donc il est identique à un $A^{(\gamma)}$, pour une valeur $\gamma \subset H_k \subset I_k$. D'après **14** on a pour le point $p(\gamma)$ de E:

$$(57) \qquad p(\gamma) \subset D(\gamma) \times \overline{A^{(\gamma)}} \times \overline{A_c^{(\gamma)}} = D(\gamma) \times \bar{A} \times \bar{A}_c \subset \bar{A} \times \bar{A}_c,$$

donc:

$$(58) \qquad E \times \bar{A} \times \bar{A}_c \neq 0$$

en contradiction avec (52).

On voit qu'il n'existe aucune décomposition (34), (35) c. à. d. que l'ensemble E est connexe.

Le théorème 6 est ainsi démontré.