

Sur les ensembles connexes et non connexes.

Par

Wacław Sierpiński (Varsovie).

L'objet de ce Mémoire est l'étude de quelques questions qui se rattachent à la notion de connexité des ensembles de points au sens de M. Hausdorff¹⁾.

Nous dirons, d'après M. Mazurkiewicz²⁾ que deux ensembles de points A et B , situés dans l'espace à m dimensions, sont *séparés*, s'il subsiste les formules

$$AB = AB' = A'B = 0.$$

Nous dirons qu'un ensemble de points P , situé dans l'espace à m dimensions, est *connexe*, s'il n'existe aucune décomposition de cet ensemble en deux ensembles séparés³⁾.

Nous dirons que deux points a et b d'un ensemble P sont séparés dans cet ensemble, s'il existe une décomposition de P en deux ensembles séparés dont un contient a et l'autre b .

Nous dirons qu'un ensemble de points P est *dispersé*, s'il ne contient aucun ensemble connexe contenant plus qu'un point.

Il est bien évident qu'un ensemble de points P dont tous deux points sont séparés dans P , est dispersé. Or le problème se pose: deux points d'un ensemble dispersé, sont-ils nécessairement séparés dans cet ensemble? Nous démontrerons

¹⁾ F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914, Kap. VII, § 7.

²⁾ S. Mazurkiewicz: *Fundamenta Mathematicae*, t. I, p. 66.

³⁾ On démontre sans peine qu'un ensemble homéomorphe avec un ensemble connexe est connexe (Voir ma note: Sur un ensemble punctiforme connexe. *Fund. Math.* t. I, p. 7). Plusieurs propriétés des ensembles connexes sont étudiées par M. Hausdorff l. c., p. 244—249.

(§ 1) que la réponse est négative pour les ensembles plans. Dans le même § nous nous occupons du problème suivant: P étant un ensemble dont tous deux points sont séparés dans P , a étant un point donné de P et ε un nombre positif donné, peut-on toujours décomposer P en deux ensembles séparés A et B de sorte que A contienne a et que le diamètre de A soit $< \varepsilon$? Nous prouvons que la réponse est négative. Nous obtenons en même temps un exemple d'un ensemble G_δ punctiforme qui n'est pas homéomorphe avec aucun ensemble linéaire ¹⁾.

Dans le § 2 nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble punctiforme (situé dans l'espace à m dimensions) soit homéomorphe avec un ensemble linéaire.

Dans le § 3 nous démontrons que le complémentaire d'un ensemble punctiforme situé dans l'espace à $m > 1$ dimensions est toujours connexe ²⁾.

1. Désignons généralement par $R(a, b, c, d)$ le rectangle déterminé par les droites

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

et soit $H = R(a, b, c, d)$ un rectangle donné. Nous désignerons pour tout nombre naturel n par $R_{2^{n-1}}(H)$ et $R_{2^n}(H)$ respectivement les rectangles

$$(1) \quad R_{2^{n-1}}(H) = R\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2^{n-1}}}, \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2^n}}, \frac{c+d}{2}, d\right)$$

et

$$(2) \quad R_{2^n}(H) = R\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2^n}}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2^{n-1}}}, c, \frac{c+d}{2}\right).$$

On voit sans peine que le rectangle $R_n(H)$ est toujours contenu dans le rectangle H et que ses côtés sont non supérieurs aux moitiés des côtés correspondants du rectangle H .

Posons $H_0 = R(0, 1, 0, 1)$ et écrivons, pour abrégé:

$$R_n = R_n(H_0), \quad R_{n_1, n_2} = R_{n_2}(R_{n_1}(H_0)), \quad R_{n_1, n_2, n_3} = R_{n_3}(R_{n_2}(R_{n_1}(H_0)))$$

et ainsi de suite.

¹⁾ L'existence de tels ensembles a été démontré par M. Mazurkiewicz: *Fund. Math.*, t. I, p. 61—81.

²⁾ Ce théorème été déjà signalé pour le plan dans ma note citée, *Fund. Math.* t. I, p. 9.

Désignons par S_k l'ensemble de tous les points des rectangles

$$R_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (n_1, n_2, \dots, n_k = 1, 2, 3, \dots)$$

et posons

$$P = S_1 S_2 S_3 \dots$$

Or, désignons par Q l'ensemble des centres de tous les rectangles

$$(3) \quad R_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (n_i = 1, 2, 3, \dots; i = 1, 2, \dots, k; k = 1, 2, 3, \dots)$$

et posons

$$E = P + Q.$$

On voit sans peine que le rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} a des côtés $\leq \frac{1}{2^k}$, qu'il contient le rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ et que pour $n' \neq n''$ les rectangles $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n'}$ et $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n''}$ sont sans points communs. De plus on prouve sans difficulté que le rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} a une distance positive (non inférieure à la moitié de sa base) de la partie de l'ensemble E qui est extérieure à R_{n_1, n_2, \dots, n_k} .

Nous allons maintenant à démontrer que p et q étant deux points différents donnés quelconques de l'ensemble E , il existe toujours une décomposition $E = A + B$, telle que p appartient à A , q à B , et

$$(4) \quad AB = AB' = A'B = 0.$$

Distinguons, pour démontrer, deux cas:

1) L'un au moins des points p et q , soit p , est un point de Q . Donc p est centre d'un des rectangles (3), soit du rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} .

Si q n'appartient pas à R_{n_1, n_2, \dots, n_k} , désignons par A la partie de E contenue dans R_{n_1, n_2, \dots, n_k} et posons $B = E - A$: le point p appartiendra à A et le point q à B , et nous aurons les formules (4), puisque, comme nous avons remarqué plus haut, le rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} a une distance positive de la partie de E extérieure à ce rectangle.

Si q appartient à R_{n_1, n_2, \dots, n_k} , q appartient à un des rectangles $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (puisque tout point de E contenu dans R_{n_1, n_2, \dots, n_k} et autre que le centre de ce rectangle, appartient évidemment à un des rectangles $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)). Soit $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ le rectangle contenant p . En désignant par B la partie de E contenue dans $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ et en posant $A = E - B$,

nous aurons, comme on voit sans peine, les formules (4), et p appartiendra à A et q à B .

2) Les points p et q appartiennent à P .

Le point p appartenant à $P = S_1 S_2 S_3 \dots$, p appartient pour tout k donné à S_k : il existe donc pour tout k naturel un système bien déterminé d'indices n_1, n_2, \dots, n_k tel que p appartient à R_{n_1, n_2, \dots, n_k} . Nous en concluons sans peine, d'après la propriété des rectangles (3), qu'il existe (pour le point p) une suite infinie bien déterminée de nombres naturels n_1, n_2, n_3, \dots , telle que p appartient à chacun des rectangles

$$(5) \quad R_{n_1}, R_{n_1, n_2}, R_{n_1, n_2, n_3}, \dots$$

Or les côtés de ces rectangles tendant vers 0, il en résulte que les rectangles (5) convergent vers le point p . Donc, q étant un point de P différent de p , la suite correspondante n'_1, n'_2, n'_3, \dots (telle que q est le point unique appartenant à tout rectangle $R_{n'_1, n'_2, \dots, n'_k}$, pour $k = 1, 2, 3, \dots$) est différente de la suite n_1, n_2, \dots . Soient n_r et n'_r le premiers termes différents de ces deux suites. Nous aurons donc $n'_i = n_i$ pour $i = 1, 2, \dots, r-1$ et le point p appartiendra au rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_{r-1}, n_r}$ et le point q au rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_{r-1}, n'_r}$. En désignant par A la partie de E contenue dans $R_{n_1, n_2, \dots, n_{r-1}, n_r}$ et en posant $B = E - A$, nous aurons, comme on voit sans peine, les formules (4), et p appartiendra à A et q à B .

Nous avons donc démontré que tous deux points de l'ensemble E sont séparés dans cet ensemble.

$H = R(a, b, c, d)$ étant un rectangle donné, désignons respectivement par $K(H)$, $L(H)$, $M(H)$ et $N(H)$ les points aux coordonnées (a, d) , (b, c) , $\left(\frac{a+b}{2}, c\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, d\right)$.

Soit $R_{n_1, n_2, \dots, n_k} = R(a, b, c, d)$ un rectangle donné, appartenant à l'ensemble (3). D'après (1) nous aurons

$$R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 1} = R_1(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = R\left(a, \frac{3a+b}{4}, \frac{c+d}{2}, d\right)$$

$$R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2} = R_2(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = R\left(\frac{a+3b}{4}, b, c, \frac{c+d}{2}\right),$$

done:

et

$$K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 1}) = K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$$

$$L(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2}) = L(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$$

et, généralement:

$$K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 1, 1, \dots, 1}) = K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}),$$

$$L(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2, 2, \dots, 2}) = L(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}).$$

Donc, le point $K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ appartient à tout rectangle de la suite infinie

$$R_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \quad R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 1}, \quad R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 1, 1}, \dots$$

et par conséquent à tout ensemble $S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \dots$, donc aussi à l'ensemble P . De même pour le point $L(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$. Il en résulte que les points $K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ et $L(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ appartiennent tous à E .

D'après la définition du point $K(H)$ et d'après (1) nous concluons que le point $K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2^{n-1}})$ a pour coordonnées

$$x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2n-1}} \quad \text{et} \quad y = d;$$

or, le point $N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ ayant pour coordonnées $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = d$, nous concluons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2^{n-1}}) = N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}).$$

De même nous trouvons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2^n}) = M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}).$$

Les points $M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ et $N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ sont donc des points d'accumulation de l'ensemble E .

Soit $E = A + B$ une décomposition de l'ensemble E pour laquelle subsistent les formules (4).

Nous dirons que le rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} jouit de la propriété P , s'il existe un nombre positif ε tel que tout point de E dont la distance au point $M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ est $< \varepsilon$ appartient à A et tout point de E dont la distance au point $N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ est $< \varepsilon$ appartient à B .

Nous démontrerons que si le rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} jouit de la propriété P , il existe un nombre naturel n_{k+1} tel que le rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ jouit de la propriété P .

En effet, admettons que le rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_k} = R(a, b, c, d)$ jouit de la propriété P . Soit p son centre: d'après la définition

de E , ce sera un point de $E = A + B$. donc, p appartiendra à A ou à B . Distinguons deux cas:

1) p appartient à A . D'après $AB' = 0$ il existe donc un nombre positif η tel que tout point de $E = A + B$, dont la distance au point p est $< \eta$, appartient à A . Or on trouve sans peine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2n-1}) = p$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2n-1}) = N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k});$$

pour un nombre (impair) n_{k+1} suffisamment grand nous aurons donc:

$$(6) \quad \begin{aligned} & \varrho_1 = \varrho [M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}), p] < \eta \\ \text{et} & \quad \varrho_2 = \varrho [N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}), N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})] < \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit σ un nombre positif tel que

$$\sigma < \eta - \varrho_1 \quad \text{et} \quad \sigma < \varepsilon - \varrho_2;$$

d'après (6) nous aurons pour tout point q de E tel que $\varrho [q, M(R_{n_1, \dots, n_{k+1}})] < \sigma$:

$$(7) \quad \varrho [q, p] < \sigma + \varrho_1 < \eta$$

et pour tout point r de E tel que $\varrho [r, N(R_{n_1, \dots, n_{k+1}})] < \sigma$:

$$(8) \quad \varrho [r, N(R_{n_1, \dots, n_k})] < \sigma + \varrho_2 < \varepsilon.$$

L'inégalité (7) démontre (d'après la définition du nombre η) que le point q appartient à A , et l'inégalité (8) (d'après la définition du nombre ε) que le point r appartient à B . Il existe donc un nombre positif σ tel que tout point de E , dont la distance au point $M(R_{n_1, \dots, n_{k+1}})$ est $< \sigma$, appartient à A et tout point de E , dont la distance au point $N(R_{n_1, \dots, n_{k+1}})$ est $< \sigma$, appartient à B . Le rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ jouit donc de la propriété P .

2) p appartient à B . D'après $A'B = 0$ il existe donc un nombre positif η tel que tout point de E dont la distance au point p est $< \eta$ appartient à B . Or nous trouvons aisément:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2n}) = p \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, 2n}) = M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}).$$

Pour un nombre (pair) n_{k+1} suffisamment grand nous aurons donc

$$\begin{aligned} & \varrho_1 = \varrho [N(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}), p] < \eta \\ \text{et} & \quad \varrho_2 = \varrho [M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}), M(R_{n_1, n_2, \dots, n_k})] < \varepsilon. \end{aligned}$$

En raisonnant comme plus haut, nous concluons que le rectangle $R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ jouit de la propriété P .

Donc, si le rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} jouit de la propriété P , il existe une suite infinie d'indices n_{k+1}, n_{k+2}, \dots , telle que chacun des rectangles

$$(9) \quad R_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \quad R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}, \quad R_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+2}}, \dots$$

jouit de la propriété P . Or, comme nous savons, les rectangles (9) convergent vers un point p_0 qui est un point commun à tous ces rectangles, et par suite appartient à E . Nous aurons donc aussi évidemment

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M(R_{n_1, n_2, \dots, n_s}) = \lim_{s \rightarrow \infty} N(R_{n_1, n_2, \dots, n_s}) = p_0.$$

On en tire sans peine (les rectangles (9) jouissant tous de la propriété P) que dans tout entourage de p_0 existent des points de A et des points de B . Or, c'est impossible, puisque p_0 est un point de $E = A + B$ et puisque subsistent les formules (4).

Nous avons ainsi démontré qu'aucun rectangle R_{n_1, n_2, \dots, n_k} ne jouit pas de la propriété P .

Soit maintenant $p_0 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ le centre du rectangle $H_0 = R(0, 1, 0, 1)$ et supposons que p_0 appartient à l'ensemble A .

Nous avons

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M(R_{2^n-1}) = p_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N(R_{2^n-1}) = N(H_0).$$

Le point p_0 appartenant à A , il existe un nombre positif η tel que tout point de E dont la distance au point p_0 est $< \eta$ appartient à A . Or, d'après (10), il existe pour tout ε positif un indice (impair) m tel que

$$(11) \quad \varrho_1 = \varrho [M(R_m), p_0] < \eta \quad \text{et} \quad \varrho_2 = \varrho [N(R_m), N(H_0)] < \varepsilon.$$

Soit σ un nombre positif tel que

$$\sigma < \eta - \varrho_1 \quad \text{et} \quad \sigma < \varepsilon - \varrho_2,$$

et soit q un point de E tel que $\varrho [q, M(R_m)] < \sigma$: nous aurons donc, d'après (11):

$$\varrho(q, p_0) \leq \sigma + \varrho_1 < \eta;$$

donc, q appartiendra à A .

Or, si tout point r de E satisfaisant à l'inégalité

$$(12) \quad \varrho [r, N(R_m)] < \sigma$$

appartiendrait à B , le rectangle R_m jouirait de la propriété P , ce qui est impossible, comme nous avons démontré plus haut. Donc (le point $N(R_m)$ étant, comme nous savons, un point d'accumulation de E), il existe un point r de E satisfaisant à l'inégalité (12) et appartenant à A . Or d'après (12) et (11), nous trouvons:

$$\varrho[r, N(H_0)] < \sigma + \varrho_2 < \varepsilon.$$

Il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un point r de E tel que

$$\varrho[r, N(H_0)] < \varepsilon.$$

Le point $N(H_0)$ est donc un point d'accumulation de A .

De même on démontrerait que le point $M(H_0)$ est un point d'accumulation de A .

Nous avons donc démontré que si $E = A + B$ est une décomposition de E , satisfaisante aux conditions (4), et si p_0 appartient à A , les points $N(H_0)$ et $M(H_0)$ sont points d'accumulation de A . Or, nous avons $\varrho[M(H_0), N(H_0)] = 1$. Nous avons ainsi prouvé que l'ensemble E ne peut être décomposé en deux ensembles $E = A + B$ satisfaisant aux conditions (4) et tels que p_0 appartienne à A et que le diamètre de A soit < 1 .

Désignons maintenant par E_1 l'ensemble qu'on obtient de l'ensemble E en lui adjoignant le point $N(H_0)$. Il s'en suit de la propriété de E démontrée tout de suite qu'il n'existe aucune décomposition $E_1 = A + B$ satisfaisante aux conditions (4) et telle que p_0 appartienne à A et $q = N(H_0)$ à B . Or, on démontre sans peine que l'ensemble E_1 ne contient aucun sous-ensemble connexe, contenant plus qu'un point, c'est-à-dire est dispersé. Nous avons donc un exemple d'un ensemble plan dispersé et tel que certains deux de ses points ne sont pas séparés dans cet ensemble. Un tel ensemble ne peut être évidemment homéomorphe avec aucun ensemble linéaire. Or, on pourrait démontrer sans peine que l'ensemble E_1 est un ensemble G_δ (c'est-à-dire un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts). Nous avons ainsi un exemple d'un ensemble plan G_δ punctiforme qui n'est pas homéomorphe avec aucun ensemble linéaire¹⁾.

¹⁾ Cf. S. Mazurkiewicz: *Fund. Math.* t. I, p. 61. Nous appelons *punctiforme* tout ensemble ne contenant aucun continu.

2. Théorème: Pour qu'un ensemble punctiforme P , situé dans l'espace à m dimensions, soit homéomorphe avec un ensemble linéaire, il faut et il suffit que pour tout point p de P et pour tout nombre positif ε l'ensemble P soit une somme de deux ensembles séparés $P = A + B$, tels que A contienne p et que le diamètre de A soit $< \varepsilon$.

Démonstration. Soit P un ensemble punctiforme, situé dans l'espace à m dimensions, homéomorphe avec un ensemble linéaire Q . L'ensemble Q est donc aussi punctiforme. Soit p un point de P , q — l'image de p dans Q , n — un nombre naturel donné. L'ensemble Q étant punctiforme, il existe à l'intérieur de l'intervalle $(q - \frac{1}{2n}, q)$ un point g n'appartenant pas à Q et de même à l'intérieur de l'intervalle $(q, q + \frac{1}{2n})$ un point h n'appartenant pas à Q . Soit Q_n l'ensemble de tous les points de Q qui sont intérieurs à l'intervalle (g, h) : le diamètre de Q_n sera évidemment $\leq \frac{1}{n}$ et les ensembles Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) convergeront vers le point q (qui est leur point commun unique). Soit P_n l'image de Q_n dans P : la correspondance entre les points de P et Q étant biunivoque et bicontinue et les ensembles Q_n convergeant pour $n = \infty$ vers q , on conclut sans peine que les ensembles P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) convergent vers le point p (qui est leur point commun unique). Il en résulte que pour un indice n suffisamment grand le diamètre de P_n sera $< \varepsilon$. Or, il s'en suit sans peine de la définition de Q_n que les ensembles Q_n et $Q - Q_n$ sont séparés: il sera donc de même avec les ensembles P_n et $P - P_n$, images resp. de Q_n et $Q - Q_n$ (la correspondance entre P et Q étant biunivoque et bicontinue). L'ensemble P est ainsi une somme de deux ensembles séparés, P_n et $P - P_n$, dont le premier contient le point p et a le diamètre $< \varepsilon$. La condition de notre théorème est donc nécessaire.

Soit maintenant P un ensemble de points dans l'espace à m dimensions, ε — un nombre positif donné, et supposons que pour tout point p de P existe une décomposition de l'ensemble P en deux ensembles séparés: $P = A(p) + B(p)$, tels que $A(p)$ contient p et que le diamètre de $A(p)$ est $< \varepsilon$.

Soit p un point donné de P . Le point p appartient donc à $A(p)$

et par suite n'est pas un point d'accumulation de $B(p)$ (puisque $A(p)$ et $B(p)$ sont des ensembles séparés) Il existe donc un nombre positif ϱ tel que la sphère m -dimensionnelle au centre en p et au rayon ϱ ne contient aucun point de $B(p)$. Il en résulte tout de suite qu'il existe une sphère m -dimensionnelle dont le centre a des coordonnées rationnelles et dont le rayon est rationnel, contenant à son intérieur le point p et ne contenant aucun point de $B(p)$. Or, comme on sait, on peut ranger toutes les sphères m -dimensionnelles dont les centres ont des coordonnées rationnelles et dont les rayons sont rationnels en une suite infinie (dénombrable)

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

Désignons par $n(p)$ le plus petit indice n tel que la sphère S_n contient à son intérieur le point p et ne contient aucun point de $B(p)$ (Un tel indice n existe, pour tout point p de P , d'après la remarque faite plus haut).

Divisons maintenant tous les points p de P en classes, en rangeant dans une même classe deux points p et q dans ce et seulement dans ce cas, si $n(p) = n(q)$. Soit N l'ensemble contenant un et un seul point de chacune de ces classes. A toute classe correspondant un nombre naturel et aux classes différentes — des nombres naturels différents, l'ensemble de toutes les classes, donc aussi l'ensemble N , sera fini ou dénombrable. Soient

$$(1) \quad p_1, p_2, p_3, \dots$$

les points constituant N . Je dis que tout point de P appartient à un au moins des ensembles

$$(2) \quad A(p_1), A(p_2), A(p_3), \dots$$

En effet, soit p un point de P , $n = n(p)$. D'après la définition de l'ensemble N , il existe un point p_k de la suite (1) tel que $n(p) = n(p_k)$. Il en résulte: $S_{n(p)} = S_{n(p_k)}$; or, d'après la définition des nombres $n(p)$, la sphère $S_{n(p)}$ contient à son intérieur le point p , donc aussi la sphère $S_{n(p_k)}$ contient p . Or, la sphère $S_{n(p_k)}$ ne contient aucun point de $B(p_k)$: donc (p étant un point de P), p appartient à $P - B(p_k) = A(p_k)$, c'est à dire à un terme de la suite (2), c. q. f. d.

Posons maintenant:

$$(3) \quad \text{et} \quad A_1 = A(p_1) \\ A_n = A(p_n) - [A(p_1) + A(p_2) + \dots + A(p_{n-1})] \quad (\text{pour } n = 2, 3, \dots).$$

Tout point p de P appartiendra donc à un et un seul d'ensembles

$$A_1, A_2, A_3, \dots,$$

Posons encore $B_n = P - A_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Je dis que les ensembles A_n et B_n sont séparés (pour $n = 1, 2, 3, \dots$).

Pour $n=1$ cela résulte des formules $A_1 = A(p_1)$ et $B_1 = P - A_1 = P - A(p_1) = B(p_1)$, les ensembles $A(p_1)$ et $B(p_1)$ étant séparés. Supposons donc que n est un indice > 1 . Il suffira évidemment démontrer que les ensembles $A_n B'_n$ et $A'_n B_n$ sont vides.

D'après (3) nous trouvons sans peine:

$$A_n = [P - A(p_1)] [P - A(p_2)] \dots [P - A(p_{n-1})] A(p_n) = \\ = B(p_1) B(p_2) \dots B(p_{n-1}) \cdot A(p_n)$$

$$B_n = P - A_n = A(p_1) + A(p_2) + \dots + A(p_{n-1}) + [P - A(p_n)] = \\ = A(p_1) + A(p_2) + \dots + A(p_{n-1}) + B(p_n).$$

Donc, la dérivée du produit étant contenue dans le produit des dérivées et la dérivée d'une somme finie d'ensembles étant égale à la somme des dérivées, nous trouvons:

$$(4) \quad A'_n B_n \subset \\ \subset B'(p_1) B'(p_2) \dots B'(p_{n-1}) A'(p_n) [A(p_1) + A(p_2) + \dots + A(p_{n-1}) + B(p_n)],$$

$$(5) \quad A_n B'_n = \\ = B(p_1) B(p_2) \dots B(p_{n-1}) A(p_n) [A'(p_1) + A'(p_2) + \dots + A'(p_{n-1}) + B'(p_n)].$$

Or, les ensembles $A(p)$ et $B(p)$ étant séparés (pour tout point p de P), nous avons pour tout indice k :

$$A(p_k) B'(p_k) = 0 \quad \text{et} \quad A'(p_k) B(p_k) = 0:$$

les formules (4) et (5) donnent donc tout de suite: $A'_n B_n = 0$ et $A_n B'_n = 0$, c. q. f. d.

D'après (3) nous avons $A_n \subset A(p_n)$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$: le diamètre de $A(p)$ étant $< \varepsilon$ (pour tout point p de P), il en résulte que le diamètre de tout ensemble A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) est $< \varepsilon$.

Nous avons donc démontré que si pour tout point p de l'en-

semble P existe une décomposition de P en deux ensembles séparés $P = A(p) + B(p)$, tels que $A(p)$ contient p et que le diamètre de $A(p)$ est $< \varepsilon$, il existe une décomposition de P en un nombre fini ou en une infinité dénombrable d'ensembles sans points communs deux à deux

$$A_1(\varepsilon), A_2(\varepsilon), A_3(\varepsilon), \dots,$$

tels que

$$(6) \quad A'_n(\varepsilon) [P - A_n(\varepsilon)] = A_n(\varepsilon) [P - A_n(\varepsilon)]' = 0 \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

D'ailleurs, pour avoir toujours une suite infinie $A_n(\varepsilon)$, nous pouvons supposer les ensembles manquant vides.

Posons maintenant, pour n_1, n_2, \dots, n_k naturels:

$$(7) \quad A_{n_1, n_2, \dots, n_k} = A_{n_1}(1) A_{n_2}(\frac{1}{2}) \dots A_{n_k}(\frac{1}{k});$$

nous aurons

$$P - A_{n_1, n_2, \dots, n_k} = [P - A_{n_1}(1)] + [P - A_{n_2}(\frac{1}{2})] + \dots + [P - A_{n_k}(\frac{1}{k})],$$

donc:

$$\begin{aligned} & A'_{n_1, n_2, \dots, n_k} [P - A_{n_1, n_2, \dots, n_k}] \subset \\ & \subset A'_{n_1}(1) \dots A'_{n_k}(\frac{1}{k}) \{ [P - A_{n_1}(1)] + \dots + [P - A_{n_k}(\frac{1}{k})] \}, \\ & A_{n_1, n_2, \dots, n_k} [P - A_{n_1, n_2, \dots, n_k}]' = \\ & = A_{n_1}(1) \dots A_{n_k}(\frac{1}{k}) \{ [P - A_{n_1}(1)]' + \dots + [P - A_{n_k}(\frac{1}{k})]' \}, \end{aligned}$$

ce qui donne, d'après (6):

$$(8) \quad A'_{n_1, n_2, \dots, n_k} [P - A_{n_1, n_2, \dots, n_k}] = A_{n_1, n_2, \dots, n_k} [P - A_{n_1, n_2, \dots, n_k}]' = 0.$$

Soit p un point donné de l'ensemble P . D'après (7) et d'après $A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon) + \dots = P$, la somme de tous les ensembles A_{n_1, n_2, \dots, n_k} , étendue à tous les systèmes de k nombres naturels n_1, n_2, \dots, n_k donne l'ensemble P (pour tout indice k donné) et, d'après $A_n(\varepsilon) \cdot A_{n'}(\varepsilon) = 0$ pour $n \neq n'$, les ensembles A_{n_1, n_2, \dots, n_k} correspondant aux systèmes différents de k indices sont sans points communs. Il existe donc pour le point p de P et pour tout k naturel donné un système unique de k indices n_1, n_2, \dots, n_k tel que p appartient à A_{n_1, n_2, \dots, n_k} . Or, l'ensemble $A_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ étant, d'après (7), toujours contenu dans l'ensemble A_{n_1, n_2, \dots, n_k} , nous en concluons qu'il existe pour le point p une suite infinie unique des indices

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

telle que p appartient à chacun d'ensembles

$$(9) \quad A_{n_1}, A_{n_1, n_2}, A_{n_1, n_2, n_3}, \dots$$

Or, le diamètre de l'ensemble A_{n_1, n_2, \dots, n_k} (comme contenu dans $A_{n_k}(\frac{1}{k})$) étant $< \frac{1}{k}$, il est évident que la suite (9) converge vers le point p qui est le point commun unique de tout ensemble (9). Posons

$$x(p) = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \dots$$

Ainsi à tout point p de P correspondra un nombre irrationnel $x(p)$. Soit X l'ensemble de tous les nombres $x(p)$ correspondant aux points p de P . Je dis que les ensembles P de X sont homéomorphes.

Nous prouverons d'abord que notre correspondance est biunivoque. Il suffira évidemment à démontrer que pour deux points différents p et p' de P nous avons $x(p) \neq x(p')$. En effet, s'il serait $x(p) = x(p')$, les fractions continues pour $x(p)$ et $x(p')$ seraient identiques et p et p' seraient points communs uniques de tous les termes d'une même suite (9), ce qui est impossible pour $p \neq p'$.

Il nous reste donc à démontrer que notre correspondance est bicontinue. Soit donc p un point donné de P , (9) — la suite correspondante, dont chacun terme contient p , et soit k un indice donné. D'après (8) il existe un nombre positif ϱ tel que tout point q de P ayant une distance $< \varrho$ au point p appartient à A_{n_1, n_2, \dots, n_k} . Donc, pour un tel point q de P les k -ièmes réduites de $x(p)$ et $x(q)$ coïncident. Il en résulte tout de suite la continuité de la fonction $x(p)$ dans l'ensemble P .

Or, soit $x = x(p)$ un nombre donné de l'ensemble X , ϱ — un nombre positif donné. Soit k un indice tel que $\frac{1}{k} < \varrho$. Il existe, comme on sait, pour l'indice k un nombre positif δ tel que toute fraction infinie différant de $x(p)$ à moins que δ coïncide en sa k -ième réduite avec la fraction $x(p)$. Donc, si $x(q)$ est un nombre de X différant de $x(p)$ à moins que δ , le point q appartiendra à l'ensemble A_{n_1, n_2, \dots, n_k} de même que le point p . Donc, le diamètre de A_{n_1, n_2, \dots, n_k} étant $< \frac{1}{k} < \varrho$, la distance entre p et q sera $< \varrho$. La correspondance $x(p)$ est donc bicontinue.

Nous avons donc démontré que les ensembles P et X sont homéomorphes, donc que P est homéomorphe avec un ensemble linéaire. Notre théorème est donc démontré.

Remarquons qu'il résulte tout de suite de notre théorème le théorème III de M. Mazurkiewicz (*Fund. Math.* t. I, p. 67) et de plus il résulte que la condition donnée par ce théorème III est non seulement nécessaire pour qu'un ensemble punctiforme soit homéomorphe avec un ensemble linéaire (comme l'a démontré M. Mazurkiewicz), mais aussi suffisante.

L'ensemble plan E que nous avons considéré dans le § 1 ne satisfait pas à la condition de notre théorème. Or, tous deux points de E sont séparés dans cet ensemble. Donc: il existe un ensemble plan E , dont tous deux points sont séparés dans E , non homéomorphe avec aucun ensemble linéaire.

3. Théorème: Si P est un ensemble punctiforme, situé dans l'espace à $m > 1$ dimensions, le complémentaire de P est un ensemble connexe.

Démonstration. Soit P un ensemble punctiforme dans l'espace à $m > 1$ dimensions et supposons que son complémentaire $Q = C(P)$ n'est pas connexe. Il existe donc une décomposition $Q = A + B$, telle que $AB = AB' = A'B = 0$ (et que A et B ne sont pas vides). Posons $E = A'B'$: ce sera évidemment un ensemble fermé, contenu dans P (quisque $QE = (A + B)A'B' = AB'.A' + BA'.B' = 0$), donc punctiforme (puisque P est punctiforme). Or, soit a un point de A , b — un point de B : les points a et b appartenant à $A + B = Q$, il n'appartiennent pas à P . Donc, P étant un ensemble fermé et punctiforme dans l'espace à $m > 1$ dimensions, il existe une ligne brisée L joignant a et b , sans points communs avec P ¹⁾. Soit g le point de l'ensemble (fermé) $(A + A')L$ qui est le plus éloigné de a sur la ligne L . Nous aurons $g \neq b$, puisque b est un point de B et $B(A + A') = BA + BA' = 0$. Or soit h un point quelconque situé sur L entre g et b . L'ensemble P étant punctiforme, il existe sur L entre g et h un point p n'appartenant pas à P , donc appartenant à $Q = A + B$. Le point p comme situé sur L entre g et b a sur L une distance de a supérieure à la distance entre a et g sur L : donc, il résulte de la définition du point g

¹⁾ E. Phragmén: *Acta Mathematica* 7 (1885) p. 44 (Le théorème est exprimé par M. Phragmén pour les ensembles plans).

que p n'appartient pas à A . Donc p appartient à B . Nous avons donc démontré que dans tout entourage de g existe un point de B : donc g appartient à B' . Or, g est un point de $A + A'$; par conséquent g est un point de l'ensemble $(A + A')B' = AB' + A'B' = A'B' = E$. Or c'est impossible, puisque g est un point de L , $E \subset P$ et $LP = 0$. Nous avons donc démontré que P est un ensemble connexe, c. q. f. d.
