Sur les images des fonctions représentables analytiquement.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Soit $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction donnée de n variables réelles. L'ensemble $I(f)$ de tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ de l'espace à $n+1$ dimensions dont les coordonnées sitisfont à l'égalité

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{n+1}$$

est appelé *image* de la fonction f. Suivant une notation utilisée par M. Lebesgue, nous pouvons écrire: $I(f) = E(f = x_{n+1})$ [1].

La fonction f est évidemment caractérisée par l'ensemble $I(f)$. Nous donnerons dans cette Note une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire l'image d'une fonction, pour qu'elle soit représentable analytiquement.

Or il n'est pas facile de trouver des conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire l'ensemble $I(f)$ pour que f soit une fonction d'une classe donnée. Le problème devient beaucoup plus facile si l'on considère au lieu de l'ensemble $I(f)$ les deux ensembles

$$E(f < x_{n+1}) \quad \text{et} \quad E(f > x_{n+1}) \tag{1}$$

en lesquels — on pourrait dire — l'image $I(f)$ découpe l'espace à $n+1$ dimensions.

Nous examinerons comment la classe de la fonction f dépend des classes des ensembles (1).

[1] M. Lebesgue considère d'ailleurs des ensembles n-dimensionnels $E(f = a)$, $E(f > a)$ etc., où a est une constante.

1. Théorème I. Pour qu'une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (définie pour tous les systèmes de n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$) soit de classe α au plus, il faut et il suffit que les deux ensembles

$$(1) \qquad E(f < x_{n+1}) \quad \text{et} \quad E(f > x_{n+1})$$

soient des ensembles O de classes α au plus.

On dit, d'après M. Lebesgue[1]) qu'un ensemble de points (situé dans l'espace à m dimensions) est O, de classe α, s'il peut être considéré comme l'ensemble $E(\varphi \neq 0)$ relatif à une fonction φ (de m variables réelles), de classe α, et si cela est impossible à l'aide d'une fonction de classe inférieure à α[2]). On peut aussi définir les ensembles O sans l'aide de fonctions, comme il suit.

Les ensembles O, de classe 0 (dans l'espace à m dimensions) sont des ensembles *ouverts*, c'est-à-dire ceux qui sont complémentaires des ensembles fermés. Pour $\alpha > 0$ on définit les ensembles O de classe α par l'induction transfinie, comme ensembles qui ne sont pas des ensembles O de classe $< \alpha$ et qui sont de la forme

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{\infty} C(E_{k,l}), \text{ où } E_{k,l} \ (k, l = 1, 2, 3, \dots) \text{ sont des ensembles } O$$

de classe $< \alpha$[3]).

Soit $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction donnée de n variables réelles, de classe α au plus. Nous démontrerons que les ensembles (1) sont O de classe α au plus.

Cela est vrai pour $\alpha = 0$. En effet, si la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables réelles est continue, il est de même avec la fonction de $n+1$ variables réelles $F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}$; donc les ensembles (dans l'espace à $n+1$ dimensions) $E(F \geqslant 0)$ et $E(F \leqslant 0)$ sont fermés, et parsuite leurs complémentaires $E(F < 0) = E(f < x_{n+1})$ et $E(F > 0) = E(f > x_{n+1})$ sont ouverts, donc ensembles O de classe 0.

[1]) H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement *Journal de Mathématiques* Série 6, t. I (1905), p. 156.

[2]) On pourrait d'ailleurs démontrer qu'un ensemble O de classe $\alpha > 0$ situé dans l'espace à m dimensions est aussi O de classe α dans l'espace à $m+p$ dimensions. Cela serait inexact pour les ensembles O de classe 0.

[3]) L'équivalence de ces deux définitions des ensembles O résulte immédiatement des propositions établies par M. Lebesgue dans son mémoire cité, p. 163.

Soit maintenant α un nombre ordinal > 0 et supposons notre proposition vraie pour les nombres ordinaux $\xi < \alpha$. La fonction f étant de classe α au plus, il existe une suite infinie de fonctions f_s $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ convergente vers f et telle que f_s est une fonction de classe α_s, où $\alpha_s < \alpha$, pour $s = 1, 2, 3, \ldots$ Or, on vérifie sans peine les égalités

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & E(f < x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{s=p}^{\infty} \complement E\left(f_s - \frac{1}{k} > x_{n+1}\right) \\ \text{et} \\ & E(f > x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{s=p}^{\infty} \complement E\left(f_s - \frac{1}{k} < x_{n+1}\right) \end{aligned} \right.$$

Les fonctions $f_s - \frac{1}{k}$ $(k, s = 1, 2, 3, \ldots)$ étant de classes $< \alpha$ et notre proposition étant vraie, d'après l'hypothèse, pour $\xi < \alpha$, les ensembles $E\left(f_s - \frac{1}{k} > x_{n+1}\right)$ et $E\left(f_s - \frac{1}{k} < x_{n+1}\right)$ sont ensembles O de classes $< \alpha$: les formules (2) prouvent donc que les ensembles $E(f < x_{n+1})$ et $E(f > x_{n+1})$ sont O, de classes α au plus. Notre proposition est ainsi établie par l'induction transfinie.

La condition de notre théorème I est donc nécessaire. Nous allons maintenant à démontrer qu'elle est suffisante. Nous déduirons cela du théorème (V) de M. Lebesgue (l. c. p. 168), lequel nous exprimerons comme il suit.

Pour qu'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ partout définie (dans l'espace à n dimensions) soit de classe α au plus, il faut et il suffit que, quels que soit le nombre rationnel r, les ensembles (n-dimensionnels)

$$E(f \geqslant r) \quad \text{et} \quad E(f \leqslant r)$$

soient F de classe α au plus[1]).

[1]) M. Lebesgue exprime son théorème comme il suit:

Pour qu'une fonction f partout définie soit de classe α au plus, il faut et il suffit que, quels que soient les nombres rationnels r_1 et r_2, $E(r_1 \leqslant f \leqslant r_2)$ soit de classe α au plus.

En exprimant ainsi le théorème, il faudrait admettre des valeurs infinies pour r_1 et r_2, puisque autrement le théorème serait inexact pour les fonctions non bornées, même pour $\alpha = 0$ (p. e. pour la fonction $f(x)$ égale à 0 pour $x \leqslant 0$ et à $\frac{1}{x}$ pour $x > 0$ qui n'est pas de classe 0).

On dit qu'un ensemble de points est F, de classe α, s'il peut être considéré comme ensemble $E(\varphi = 0)$ où φ est de classe α et ne peut être de classe inférieure. On voit sans peine que le complémentaire d'un ensemble F est un ensemble O de même classe et inversement. La partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles F de classe α au plus est F de classe α au plus [1]).

Soit $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction donnée de n variables réelles, telle que les ensembles (1) sont O de classe α au plus. Leurs complémentaires

$$E(f \geqslant x_{n+1}) \quad \text{et} \quad E(f \leqslant x_{n+1})$$

seront donc des ensembles F de classe α au plus; r étant un nombre rationnel donné, posons

$$P(r) = E(x_{n+1} = r) \,.\, E(f \geqslant x_{n+1}) \quad \text{et} \quad Q(r) = E(x_{n+1} = r) \,.\, E(f \leqslant x_{n+1})$$

— ce seront des ensembles F de classe α au plus, comme produits de deux ensembles de classe α au plus (l'ensemble $E(x_{n+1} = r)$ étant évidemment F de classe 0).

Or on voit sans peine que les ensembles

$$E(f \geqslant r) \quad \text{et} \quad P(r)$$

sont superposables, ainsi que les ensembles

$$E(f \leqslant r) \quad \text{et} \quad Q(r).$$

Donc, les ensembles $E(f \geqslant r)$ et $E(f \leqslant r)$ sont F de classe α au plus. D'après le théorème de M. Lebesgue, la fonction f est donc de classe α au plus. c. q. f. d.

Comme un cas particulier de notre théorème, pour $\alpha = 1$ (en remarquant qu'un ensemble O de classe $\leqslant 1$ est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, c'est-à-dire un F_σ, et inversement), nous obtenons le théorème:

Pour qu'une fonction discontinue de n variables réelles $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit une fonction de première classe, il faut et il suffit que les ensembles (1) soient des ensembles F_σ.

Une démonstration directe de ce théorème pour $n = 1$ a été donnée par moi sur une autre place [2]).

[1]) Lebesgue, l. c., p. 159.

[2]) *Comptes Rendus* t. 170, p. 919 (note du 19 avril 1920).

2. En observant que le complémentaire d'un ensemble O est un ensemble F de même classe et inversement, on voit sans peine que le théorème I est équivalent au

Théorème II: Pour qu'une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables réelles soit de classe α au plus, il faut et il suffit que les deux ensembles

$$E(f \geqslant x_{n+1}) \quad \text{et} \quad E(f \leqslant x_{n+1})$$

soient des ensembles F de classe α au plus.

On en déduit tout de suite que pour qu'une fonction f de n variables réelles soit de classe α au plus, il faut que son image $E(f = x_{n+1})$ soit un ensemble F de classe α au plus. Or cette condition n'est pas suffisante pour que f soit de classe $\leqslant \alpha$ (Pour $\alpha = 0$ il suffirait de considérer la fonction $f(x)$ égale à 0 pour $x \leqslant 0$ et à $1/x$ pour $x > 0$ qui est de classe 1 et dont l'image est fermée. Pour $\alpha = 1$ on pourrait sans peine construire une fonction bornée $f(x)$ de deuxième classe, dont l'image est un ensemble F de classe 1. On obtient une telle fonction en posant p. e. $f(x) = 0$ pour x irrationnels et $f\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + \frac{1}{q}$ pour les fractions irréductibles $\left.\frac{p}{q}\right)$.

Or nous démontrerons le suivant

Théorème III: Pour qu'une fonction f (de n variables réelles) soit représentable analytiquement, il faut et il suffit que son image $E(f = x_{n+1})$ soit mesurable B.

Nous avons démontré tout de suite que la condition de notre théorème est nécessaire: il nous reste donc à démontrer qu'elle est suffisante.

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables réelles, dont l'image $E(f = x_{n+1})$ est un ensemble (A)[1]) et soit a un nombre réel donné quelconque. Les ensembles

$$M(r) = E(f = x_{n+1}) \,.\, E(x_{n+1} \geqslant a) \quad \text{et} \quad N(r) = E(f = x_{n+1}) \,.\, E(x_{n+1} < a),$$

[1]) On appelle *ensembles* (A) les images univoques et continues (dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions) de l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Notre démonstration utilise les suivantes propriétés des ensembles (A), démontrées par M. Souslin:

Le produit de deux (même d'une infinité dénombrable) d'ensembles (A) est un ensemble (A).

comme produits de deux ensembles (A) seront des ensembles (A). Leurs projections parallèlement à l'axe OX_{n+1}, c'est-à-dire les ensembles n-dimensionnels

$$(3) \qquad E(f \geqslant a) \quad \text{et} \quad E(f < a)$$

seront donc aussi des ensembles (A). Or, les ensembles (3) sont complémentaires l'un de l'autre: d'après le théorème de M. Souslin il sont donc tous les deux mesurables B. De même on pourrait démontrer que les ensembles (n-dimensionnels) $E(f \leqslant b)$ et $E(f > b)$ sont mesurables B pour tout b réel donné Donc les ensembles

$$E(a \leqslant f \leqslant b) = E(f \geqslant a) \, . \, E(f \leqslant b)$$

sont mesurables B quels que soient a et b: autrement dit, la fonction f est mesurable B. D'après le théorème VI de M. Lebesgue (l. c. p. 168) la fonction f est donc représentable analytiquement.

Nous avons donc démontré que toute fonction, dont l'image est un ensemble (A), est représentable analytiquement. Tout ensemble mesurable B étant un ensemble (A), nous avons ainsi démontré que la condition de notre théorème III est suffisante. Nous avons évidemment démontré en même temps le

Théorème IV: Pour qu'une fonction f soit représentable analytiquement, il faut et il suffit que son image soit un ensemble (A).

3. Théorème V: Pour qu'une fonction f (de n variables réelles) soit de classe α, il faut et il suffit que l'un quelconque de deux ensembles

La projection (orthogonale) d'un ensemble (A) est un ensemble (A).

Pour qu'un ensemble (A) soit mesurable B, il faut et il suffit que son complémentaire soit un ensemble (A).

Tout ensemble mesurable B est un ensemble (A).

Pour plus de détails sur les ensembles (A) nous renverrons le lecteur aux Notes de MM. Souslin et Lusin du 8 janvier 1917, publiées aux *Comptes Rendus* (t. 164), au mémoire de N. Lusin et W. Sierpiński „Sur quelques propriétés des ensembles (A)", publié dans le *Bulletin de l'Acad. des Sc. de Cracovie* 1918, p. 32—48, et à la note de W. Sierpiński: „Sur une généralisation des ensembles mesurables B" l. c. 1918, p. 161—167 (Dans ces publications ne sont considérés que les ensembles (A) linéaires, mais l'extension à l'espace à m dimensions n'offre pas de difficulté). Quant à l'application de la théorie des ensembles (A) aux fonctions représentables analytiquement, voir aussi ma note „Sur une propriété des fonctions représentables analytiquement", publiée dans le *Bulletin* cité, 1918, p. 179—184.

$$(1) \qquad E(f < x_{n+1}) \quad \text{et} \quad E(f > x_{n+1})$$

soit un ensemble O de classe α et l'autre — un ensemble O de classe α au plus.

Démonstration. Soit f une fonction de classe α. D'après notre théorème I, les ensembles (1) sont O de classe α au plus. Soient α_1 et α_2 leurs classes: nous aurons donc $\alpha_1 \leqslant \alpha$ et $\alpha_2 \leqslant \alpha$. S'il était $\alpha_1 < \alpha$ et $\alpha_2 < \alpha$, nous aurions, en posant $\beta = \text{Max}(\alpha_1, \alpha_2)$, les inégalités $\alpha_1 \leqslant \beta$, $\alpha_2 \leqslant \beta$ et $\beta < \alpha$. Les ensembles (1) seraient donc O de classe β au plus, et parsuite (d'après notre théorème I) la fonction f serait de classe β au plus, donc de classe inférieure à α, contrairement à l'hypothèse. Donc un au moins des nombres α_1 et α_2 est égal à α (et l'autre est $\leqslant \alpha$). La condition de notre théorème est donc nécessaire.

Soit maitenant f une fonction telle que l'un quelconque des ensembles (1) est O de classe α et l'autre O de classe $\leqslant \alpha$. D'après le théorème I la fonction f est donc de classe $\beta \leqslant \alpha$. Par conséquent, d'après le même théorème, les ensembles (1) sont O de classe β au plus. Or, l'un de ces ensembles étant, par l'hypothèse, de classe α, nous trouvons $\alpha \leqslant \beta$. Les inégalités $\beta \leqslant \alpha$ et $\alpha \leqslant \beta$ donnent: $\beta = \alpha$. La fonction f est donc de classe α. Nous avons donc démontré que la condition de notre théorème est suffisante.

Le théorème V est ainsi démontré. Il en résulte tout de suite le

Théorème IV: Pour qu'une fonction f soit de classe α, il faut et il suffit que l'un quelconque de deux ensembles

$$E(f \geqslant x_{n+1}) \quad \text{et} \quad E(f \leqslant x_{n+1})$$

soit un ensemble F de classe α et l'autre — un ensemble F de classe α au plus[1]).

[1]) Quant au théorème IV de M. Lebesgue (l. c., p. 167; cf. aussi: C. de la Vallée Poussin: *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire,* Paris 1916, p. 141, § 138), la condition de ce théorème n'est pas nécessaire pour qu'une fonction soit de classe α (pour les nombres α de seconde espèce), comme j'ai le démontré dans la note „Sur un théorème de M. Lebesgue" publiée dans le *Bull. de l'Ac. de Sc. de Cracovie* 1918, p. 168—171.