Sur l'équivalence de deux théorèmes de la Théorie des ensembles.

Par

S. Saks (Varsovie).

Dans une note „Un théorème sur les ensembles fermés" [1]) M. Sierpiński démontra sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo une généralisation du „Durchschnittsatz" de Cantor [2]).

Nous nous proposons de démontrer que ledit théorème de M. Sierpiński est équivalent au théorème de M. Borel et que cette équivalence est valable pour des „espaces" les plus générales.

Précisons d'abord les notations. $\mathfrak{A}$ désignant un ensemble des ensembles (une famille des ensembles), les symboles $\Sigma\mathfrak{A}$ et $\Pi\mathfrak{A}$ signifient resp. la somme et le produit de tous les ensembles de $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ ne contient qu'un nombre fini des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, nous posons aussi:

$$\Sigma\mathfrak{A} \equiv A_1 + A_2 + \dots + A_n \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

$$\Pi\mathfrak{A} \equiv A_1 A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

(a) désigne l'ensemble ne contenant que l'élément a.

Soit maintenant E un ensemble que nous appelerons espace de points. Distinguons deux classes de sous-ensembles de E: la classe des ensembles fermés et celle des ensembles bornés.

Définition. Nous appelerons domaine chaque sous-ensemble de E qui est complément (dans E) d'un ensemble fermé.

[1]) Bull. de l'Ac. des Sciences de Cracovie 1918, p. 49.

[2]) La démonstration bien connue du théorème de Cantor s'appuit sur l'axiome de M. Zermelo.

Axiome I (théorème de M. Borel). Si un ensemble fermé et borné F est contenu dans une somme des domaines, il existe un nombre fini de ces domaines $G_1, G_2, \ldots, G_n$, tels que $F \subset \sum_{i=1}^{n} G_i$.

Axiome II (théorème de M. Sierpiński). Si $\mathfrak{F}$ est une famille des ensembles fermés. dont l'un au moins est borné, telle que pour chaque nombre fini de ces ensembles leur produit ne soit pas vide, on a aussi: $\Pi\mathfrak{F} \not\equiv 0$.

1) Le premier de ces axiomes entraîne le deuxième.

Soit $\mathfrak{F}$ une famille des ensembles fermés dont l'un, p. e. F_0, est borné, telle que le produit de chaque nombre fini de ces ensembles ne soit pas vide. Supposons que $\Pi\mathfrak{F} \equiv 0$, d'où:

$$F_0 \cdot \Pi\mathfrak{F} \equiv 0,$$
$$F_0 \subset C(\Pi\mathfrak{F})\ ^{1)}.$$

Soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des compléments des ensembles de la famille $\mathfrak{F}$. On a $C(\Pi\mathfrak{F}) \equiv \Sigma\mathfrak{G}$, donc:

$$F_0 \subset \Sigma\mathfrak{G}.$$

Les ensembles de la famille $\mathfrak{G}$ sont — d'après la définition — des domaines. Il résulte donc de l'axiome I qu'il existe un nombre fini de ces domaines $G_1, G_2, \ldots, G_n$ tel que:

$$F_0 \subset \sum_{i=1}^{n} G_i,$$

ou

$$F_0 \cdot C\left(\sum_{i=1}^{n} G_i\right) \equiv 0;$$

$$F_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} F_i \equiv 0, \quad \text{où} \quad F_i \equiv C(G_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or les ensembles $F_0, F_1, \ldots, F_n$ appartenant à la famille $\mathfrak{F}$, leur produit ne peut pas être vide. Nous aboutissons ainsi à une contradiction.

2) L'axiome II entraîne l'axiome I. Soit, en effet F, un ensemble fermé et borné, contenu dans la somme des domaines d'une famille $\mathfrak{G}$, c. à. d.

(1) $$F \subset \Sigma\mathfrak{G}, \quad \text{ou:} \quad F \cdot C(\Sigma\mathfrak{G}) \equiv 0.$$

[1]) A désignant un sous-ensemble de E, $C(A)$ désigne son complément dans E.

Écartons le cas $F \equiv 0$, où notre proposition est évidente et supposons qu'il n'existe aucun nombre fini des domaines de $\mathfrak{G}$ dont la somme contienne F. Appelons $\mathfrak{F}$ l'ensemble des compléments des domaines de $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{F}_0 \equiv \mathfrak{F} + (F)$ est donc une famille des ensembles fermés, dont l'un au moins, savoir F, est borné. Soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ une suite finie des ensembles de $\mathfrak{F}_0$. On a:

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{n} F_i \supset F \cdot \prod_{i=1}^{n} F_i \equiv F \prod_{i=1}^{m} \Phi_i,$$

Φ_i étant des ensembles de $\mathfrak{F}_0$, différents de F. Ils appartiennent donc à $\mathfrak{F}$ et leurs compléments $G_i \equiv C(\Phi_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ à $\mathfrak{G}$. On a:

$$(3) \qquad F \cdot \prod_{i=1}^{m} \Phi_i \equiv F \cdot C\left(\sum_{i=1}^{m} G_i\right) \not\equiv 0,$$

puisque, suivant notre hypothèse, F n'est pas contenu dans la somme des domaines de $\mathfrak{G}$ en nombre fini. En vertu donc de (2) et (3)

$$\prod_{i=1}^{n} F_i \not\equiv 0$$

pour chaque suite finie F_i des ensembles de $\mathfrak{F}_0$. Par suite, d'après l'axiome II:

$$\Pi \mathfrak{F}_0 \not\equiv 0, \quad \text{donc:} \quad F \cdot \Pi \mathfrak{F} \not\equiv 0, \quad \text{ou:}$$
$$F \cdot C(\Sigma \mathfrak{G}) \not\equiv 0,$$

ce qui est contradictoire avec (1).

Notre assertion est donc démontrée.