D' containing $N-D$, such that the distance between D' and K is positive, and $N-D'$ is a Jordan continuum J. The set $N-J=D'$ is connected, and it is obvious that every point of J is at a distance from K less than $d/2$. Also, since the distance between D' and K is positive, J contains all points of N (and hence of M) that lie within a distance less than some positive number $\delta_\epsilon < d/2$ from K.

Consider, now, the set

$$M-J=(M-N)+(N-J).$$

We have already noted that $N-J$ is connected. Furthermore, every component of $M-N$ has its boundary points in $N-J$. Consequently $M-J$ is connected, and the theorem is proved for this case.

Case 2. The set $M-K$ not connected. As in the proof of Theorem 7, we obtain the open set R containing K, every point of R being at a distance from $K<\epsilon$ and $\bar{R}$ being compact. Let P be any point of K. By the theorem of Hahn quoted in the proof of Theorem 9a, there is a Jordan continuum J_P which is a subset of $M\cdot R$ and contains every point of M less than a certain distance d from P. Applying the Borel Theorem, there is a finite number of such sets J_P covering K, and their sum let us denote by J_1. It is easy to see that J_1 contains all points of M that lie within a certain distance δ_ϵ from K. As $\bar{R}$ is compact, only a finite number of components of $M-J_1$ contain points of $M-R$; all other components we add to J_1 and call the resulting set J. Then J is a Jordan continuum[26]) satisfying the conditions of the theorem.

[26]) Cf. H. M. Gehman, *Some relations between a continuous curve and its subsets,* Annals of Math. v. 28, pp. 103—111, Th. 8. Although Gehman's proof depends upon properties of continuous curves that hold only in the plane, an independent proof such as the following establishes it for the general space we are considering. Theorem: *If M and N are continuous curves and N is a subset of M, and if K is a set consisting of N and any collection of components of $M-N$, then K is a continuous curve.* That K is connected im kleinen at any point of $K-N$ is obvious. Let P be a point of K in N, and let ϵ be any positive number. There is a positive number d_1 such that if x is a point of N whose distance from P is less than d_1, then x and P are joined by an arc of N every point of which is at a distance from P less than ϵ; and there is a positive number d_2 such that if y is a point of M whose distance from P is less than d_2, then y and P are joined by an arc of M every point of which is at a distance from P less than d_1. The remainder of the proof is similar to that of Lemma 2 above.

Sur un problème concernant les types de dimensions.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Kuratowski et moi, nous avons démontré[1]) que, E étant un ensemble linéaire de puissance du continu, il existe toujours un ensemble Z de puissance du continu, tel que $dZ < dE$.

Or, le problème se pose: *E et H étant deux ensembles linéaires de puissance du continu, existe-t-il toujours un ensemble Z de puissance du continu, tel que $dZ < dE$ et $dZ < dH$?*

Le but de cette Note est de prouver (à l'aide de l'axiome du choix) que la réponse y est *négative*.

On voit sans peine qu'il s'agit ici des ensembles E et H *totalement imparfaits*. En effet, admettons que E contient un sous-ensemble parfait P. L'ensemble H, dont la puissance est celle du continu, contient, comme on sait, un sous-ensemble ponctiforme de puissance du continu, soit Q, et, d'après le théorème mentionné, il existe un ensemble Z de puissance du continu, tel que $dZ < dQ$. Or, on a, comme on sait, $dQ < dP$ (P étant parfait et Q ponctiforme), donc $dZ < dQ < dP \leqslant dE$ (puisque $P \subset E$) et, d'autre part, $dZ < dQ \leqslant dH$ (puisque $Q \subset H$). On a donc $dZ < dE$ et $dZ < dH$.

D'abord je démontrerai, en m'appuyant sur le théorème de M. Zermelo, ce

Lemme[2]). *Il existe un ensemble N de puissance du continu, tel que deux sous-ensembles disjoints de N de puissance du continu ne sont jamais homéomorphes.*

[1]) Fund. Math. t. VIII (1926), p. 200.

[2]) Notre lemme, dont nous donnons ici une démonstration directe, peut être déduit sans peine d'un théorème plus général de M. Banach: ce volume p. 14. (Théorème 2).

Démonstration.

Du théorème de M. Zermelo résulte l'existence d'une suite transfinie

$$(1)\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\quad x_\omega,\ x_{\omega+1},\ldots,\ x_\alpha,\ldots\qquad (\alpha<\varphi)$$

formée de tous les nombres réels différents et nous pouvons supposer que le type φ de cette suite est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu.

E étant un ensemble donné quelconque de nombres réels, l'ensemble de toutes les transformations homéomorphes de E en un ensemble linéaire a, comme on sait, la puissance du continu. Or, la famille de tous les ensembles linéaires G_δ a aussi la puissance du continu. Donc, la famille F de toutes les fonctions, dont chacune est définie sur un ensemble G_δ (variable), Γ, et établit une transformation homéomorphe de Γ en un ensemble linéaire, a la puissance du continu. Il existe donc une suite transfinie du type φ.

$$(2)\qquad f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots,\ f_\omega(x),\ f_{\omega+1}(x),\ldots,\ f_\alpha(x),\ldots\qquad (\alpha<\varphi)$$

formée de toutes les fonctions de la famille F. Désignons généralement par Γ_α cet ensemble G_δ sur lequel est définie la fonction $f_\alpha(x)$. Nous pouvons évidemment supposer que Γ_1 est l'ensemble de tous les nombres réels et que $f_1(x)=x$ pour x réels.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie de nombres réels $\{p_\alpha\}$ comme il suit.

Posons $p_1=x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal >1 et $<\varphi$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres p_ξ pour $\xi<\alpha$.

Désignons par P_α l'ensemble de tous les nombres $f_\xi(p_\eta)$, où $\xi<\alpha$, $\eta<\alpha$ et $p_\eta\epsilon\Gamma_\xi$. De $\alpha<\varphi$ résulte sans peine que $\overline{\overline{P}}_\alpha\leqslant\overline{\alpha}^2<\overline{\varphi}=2^{\aleph_0}$. Il existe donc des termes de la suite (1) qui n'appartiennent pas à P_α: soit p_α le premier d'entre eux.

La suite transfinie $\{p_\alpha\}(\alpha<\varphi)$ est ainsi définie par l'induction transfinie: soit N l'ensemble de tous les termes de cette suite; ce sera évidemment un ensemble de puissance du continu, puisque, d'après la définition du nombre p_α et de la fonction $f_1(x)$, on a, pour $\eta<\alpha$, $p_\eta=f_1(p_\eta)\neq p_\alpha$.

Soient maintenant E et H deux sous-ensembles disjoints de N, et supposons qu'ils sont homéomorphes. Soit $g_E(x)$ une transformation homéomorphe de E en H. On a donc $H=g_E(E)$.

D'après M. Lavrentieff[1]) l'homéomorphie entre E et H peut être étendue aux ensembles G_δ, E^* et H^*, contenant respectivement E et H. Il existe donc une transformation homéomorphe $g_{E^*}(x)$ de l'ensemble E^* en l'ensemble H^*, telle que $g_{E^*}(x)=g_E(x)$ pour $x\epsilon E$. Soit $h_{H^*}(x)$ la transformation inverse pour $g_{E^*}(x)$: elle transforme donc d'une façon homéomorphe l'ensemble H^* en l'ensemble E^*.

De la définition de la suite (2) résulte qu'il existe deux nombres ordinaux μ et ν, tous les deux $<\varphi$ et tels que $E^*=\Gamma_\mu$, $H^*=\Gamma_\nu$, $g_{E^*}(x)=f_\mu(x)$ pour $x\epsilon E^*$ et $h_{H^*}(x)=f_\nu(x)$ pour $x\epsilon H^*$. On a donc $f_\mu(E)=H$ et $f_\nu(H)=E$.

Soit α un indice $>\nu$, tel que $p_\alpha\epsilon E$. On a donc $f_\mu(p_\alpha)\epsilon H\subset N$ et il existe un nombre ordinal $\beta<\varphi$, tel que $f_\mu(p_\alpha)=p_\beta$, ce qui donne, la fonction f_ν étant inverse pour f_μ, $p_\alpha=f_\nu(p_\beta)$. Il en résulte, d'après $\alpha>\nu$ et d'après la définition du nombre p_α, que $\beta\geqslant\alpha$. Or, il ne peut être $\beta=\alpha$, puisque $p_\alpha\epsilon E$, $p_\beta=f_\mu(p_\alpha)\epsilon H$ et $EH=0$. On a donc $\beta>\alpha$ et la formule $f_\mu(p_\alpha)=p_\beta$ prouve, vu la définition du nombre p_β, que $\beta\leqslant\mu$. De $p_\alpha=f_\nu(p_\beta)$ résulte donc qu'il existe au plus $\overline{\mu}$ nombres ordinaux $\alpha>\nu$, tels que $p_\alpha\epsilon E$. Par conséquent il existe aus plus $\overline{\mu}+\overline{\nu}$ nombres ordinaux α, tels que $p_\alpha\epsilon E$, donc la puissance de l'ensemble E est $\leqslant\overline{\mu}+\overline{\nu}$, donc $<2^{\aleph_0}$, puisque $\mu<\varphi$ et $\nu<\varphi$.

Nous avons ainsi démontré que si E et H sont deux sous-ensembles disjoints de N et s'ils sont homéomorphes, leur puissance est inférieure à celle du continu. L'ensemble N satisfait donc aux conditions de notre lemme qui est ainsi démontré.

Voici une généralisation de notre lemme, due à M. A. Lindenbaum[2]):

Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu, tel que si E et H sont deux sous-ensembles de N et l'ensemble $E-H$ (resp. $H-E$) est de puissance du continu, il ne peut être jamais à la fois H une image biunivoque et continue (dans un sens) de E et E une image biunivoque et continue (dans un sens) de H.

La démonstration de M. Lindenbaum est intéressante encore par ce qu'elle fournit une démonstration de notre lemme qui n'utilise pas le théorème de M. Lavrentieff.

Démonstration. E étant un ensemble donné quelconque de nombres réels, l'ensemble de toutes les fonctions définies et continues sur E a, comme on sait,

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 149.

[2]) Cette proposition ne peut être déduite du théorème 2 (cité plus haut) de M. Banach.

la puissance du continu. Or, la famille de tous les ensembles linéaires G_δ a aussi la puissance du continu. Donc, la famille Φ de toutes les fonctions, dont chacune est définie et continue sur un ensemble G_δ (variable), Γ, a la puissance du continu. Soit maintenant (2) une suite transfinie du type φ formée de toutes les fonctions de la famille Φ et soit Γ_α l'ensemble G_δ sur lequel est définie et continue la fonction $f_\alpha(x)$.

Soit N l'ensemble de puissance du continu défini à l'aide de la suite (2), dont nous venons de parler, tout à fait comme dans la démonstration de notre lemme. Soient E et H deux sous-ensembles de N, tels que $E-H$ a la puissance du continu et admettons qu'il existe une fonction $f(x)$ à valeurs distinctes définie et continue dans E, telle que $f(E)=H$, et une fonction $g(x)$ à valeurs distinctes, définie et continue dans H, telle que $g(H)=E$. Comme on sait, si $f(x)$ est une fonction définie et continue sur l'ensemble E, il existe un ensemble G_δ, Γ, contenant E, et une fonction $F(x)$, définie et continue dans Γ, telle que $F(x)=f(x)$ pour $x \epsilon E$[1]). De la définition de la suite (2) résulte donc qu'il existe un nombre ordinal $\mu<\varphi$, tel que $\Gamma=\Gamma_\mu$ et $f_\mu(x)=f(x)$ pour $x \epsilon E$. Pareillement nous concluons qu'il existe un nombre ordinal $\nu<\varphi$, tel que $H \subset \Gamma_\nu$ et $f_\nu(x)=g(x)$ pour $x \epsilon H$.

Soit λ un nombre ordinal $<\varphi$ mais plus grand que μ et que ν. Désignons par E_1 l'ensemble de tous les nombres x de E pour lesquels un au moins des nombres de la suite infinie

$$x,\ f(x),\ gf(x),\ fgf(x),\ gfgf(x), \ldots$$

est un terme de la suite (1) dont l'indice est $\leqslant \lambda$ (La fonction $f(x)$ étant définie dans E et la fonction $g(x)$ dans $H=f(E)$, on conclut sans peine, d'après $E=g(H)$, que tous les termes de notre suite infinie sont définies pour $x \epsilon E$). Les fonctions f et g étant à valeurs distinctes, on conclut sans peine, d'après $\lambda<\varphi$, que l'ensemble E_1 est de puissance $<2^{\aleph_0}$. L'ensemble $E-H$ étant de puissance $2^{\aleph_0}$, l'ensemble $(E-H)-E_1$ est donc non vide. Soit x_α un point de cet ensemble: on a donc $x_\alpha \epsilon E$ et x_α non ϵE_1, d'où résulte que $\alpha>\lambda$ et que $f(x_\alpha)=x_{\alpha_1}$, où $\alpha_1>\lambda$. Or, on a, pour $x \epsilon E$, $f(x)=f_\mu(x)$: on a donc $x_{\alpha_1}=f_\mu(x_\alpha)$ et $\alpha_1>\lambda>\mu$, et de la définition de l'ensemble N résulte qu'il ne peut être $\alpha_1>\alpha$. On a donc $\lambda<\alpha_1\leqslant\alpha$. Ensuite de x_α non ϵE_1 résulte que $gf(x_\alpha)=\alpha_{\alpha_2}$, où $\alpha_2>\lambda$. Or, pour $x \epsilon H$ on a $g(x)=f_\nu(x)$; on a donc $gf(x_\alpha)=g(x_{\alpha_1})=x_{\alpha_2}$, où $\alpha_2>\lambda>\nu$, et de la définition de l'ensemble N résulte qu'on a $\alpha_2\leqslant\alpha_1$. Pareillement, en posant $fgf(x_\alpha)=x_{\alpha_3}$, $gfgf(x_\alpha)=x_{\alpha_4}, \ldots$, on trouve

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \alpha_4 \ldots$$

Une suite décroissante de nombres ordinaux ne pouvant être infinie, il existe un indice n, tel que $\alpha_{2n}=\alpha_{2n+1}=\alpha_{2n+2}$. Soit $\varphi(x)=gf(x)$; en désignant par $\varphi^k(x)$ la k-ième itérée de la fonction $\varphi(x)$, on a $\varphi^k(x_\alpha)=x_{\alpha_{2k}}$ pour $k=1,2,3,\ldots$: or, la fonction $\varphi(x)$ est à valeurs distinctes sur E et ces valeurs appartiennent aussi à E.

Si $\alpha>\alpha_1$, on a aussi $\alpha>\alpha_2$, donc (I) $\varphi(x_\alpha)=x_{\alpha_2}\neq x_\alpha$; cependant $\varphi(x_{\alpha_{2n}})=$ $=x_{\alpha_{2n+2}}=x_{\alpha_{2n}}$, c'est-à-dire (II) $\varphi^{n+1}(x_\alpha)=\varphi^n(x_\alpha)$; d'après la remarque faite

[1]) Voir *Fund. Math.* t. IV, p. 317.

tout à l'heure sur $\varphi(x)$, les formules (I) et (II) se contredisent. On a donc nécessairement $\alpha=\alpha_1$, d'où: (III) $x_\alpha=f(x_\alpha)$. Or, la formule (III) est impossible, puisque $x_\alpha \epsilon E-H$ et $f(x_\alpha) \epsilon H$. La proposition de M. Lindenbaum est ainsi démontrée.

Soient maintenant E et H deux sous-ensembles disjoints de N, tous les deux de puissance du continu. Il est évident, d'après la propriété de l'ensemble N, qu'aucun sous-ensemble de puissance du continu de E n'est homéomorphe à aucun sous-ensemble de H. Il n'existe donc aucun ensemble Z de puissance du continu et tel que $dZ<dE$ et $dZ<dH$.

En admettant l'hypothèse du continu, on en obtient tout de suite la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe deux ensembles linéaires non dénombrables E et H, tels qu'il n'existe aucun ensemble non dénombrable Z, tel que $dZ<dE$ et $dZ<dH$.

Voici encore une autre démonstration de cette dernière proposition.

M. N. Lusin a démontré[1]) que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire non dénombrable E qui a un plus dénombrable de points sur tout ensemble parfait non dense, et qu'il existe un ensemble linéaire non dénombrable H qui est de 1[re] catégorie sur tout ensemble parfait[2]).

Soit Z un ensemble, tel que $dZ<dE$ et $dZ<dH$. L'ensemble Z est donc homéomorphe à un sous-ensemble H_1 de H, d'où résulte, comme j'ai démontré[3]) que Z est de 1[re] catégorie sur tout ensemble parfait. Or, d'après $dZ<dE$, Z est homéomorphe à un sous-ensemble E_1 de E: donc E_1 est aussi de 1[re] catégorie sur tout ensemble parfait et, en particulier, sur la droite, donc $E_1 \subset P_1+$ $+P_2+P_3+\ldots$, où P_n $(n=1,2,3,\ldots)$ sont des ensembles parfaits non denses. Or, d'après la propriété de l'ensemble E, les ensembles $E_1P_n \subset EP_n$ sont au plus dénombrables. L'ensemble E_1, donc aussi Z, est ainsi au plus dénombrable.

Il n'existe donc aucun ensemble non dénombrable Z, tel que $dZ<dE$ et $dZ<dH$, c. q. f. d.

[1]) *C. R.* t. 158, p. 1259 (note du 4 mai 1914).

[2]) Voir aussi *Fund. Math.* t. II, p. 155.

[3]) *Fund. Math.* t. IV, p. 323.

Nous donnerons encore une application de notre lemme à la démonstration de la proposition suivante de M. Kuratowski: *Il existe une famille composée de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles dont les nombres de dimensions sont non-comparables deux à deux* [1]*.*

Tout ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ pouvant être décomposé en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ d'une variable réelle, telles que, pour tout x et $y \neq x$ réels, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des sous-ensembles de N de puissance $2^{\aleph_0}$, deux à deux disjoints.

X étant un ensemble quelconque de nombres réels, désignons par $F(X)$ la somme de tous les ensembles $\varphi(x)$, où $x \in X$ et de tous les ensembles $\psi(x)$, où x non $\in X$. Soient maintenant X_1 et X_2 deux ensembles distincts de nombres réels. Il existe donc dans l'un d'eux un nombre qui n'appartient pas à l'autre, p. e. $x_1 \in X_1$ et x_1 non $\in X_2$. D'après la définition de la fonction $F(X)$, l'ensemble $\varphi(x_1)$ est donc contenu dans $F(X_1)$ et, d'après les propriétés des fonctions φ et ψ, disjoint avec tout terme de la somme $F(X_2)$, donc $\varphi(x_1) \subset F(X_1)$ et $\varphi(x_1) F(X_2) = 0$. Pareillement $\psi(x_1) \subset F(X_2)$ et $\psi(x_1) F(X_1) = 0$.

Si $F(X_1)$ est homéomorphe d'un sous-ensemble de $F(X_2)$, $\varphi(x_1)$ l'est aussi. On aurait donc deux sous-ensembles de N de puissance du continu, disjoints et homéomorphes, contrairement à la propriété de N. Pareillement $F(X_2)$ ne peut être homéomorphe à un sous-ensemble de $F(X_1)$. Les types de dimensions des ensembles $F(X_1)$ et $F(X_2)$ sont donc non comparables.

À tout ensemble X de nombres réels correspond donc un ensemble linéaire $F(X)$, de sorte que si X_1 et X_2 sont deux ensembles distincts de nombres réels, les types de dimensions de $F(X_1)$ et de $F(X_2)$ sont non comparables. La proposition de M. Kuratowski est ainsi démontrée.

Voici encore une autre conséquence facile de notre lemme qui résout affirmativement un problème de M. Szpilrajn:

Il existe une famille F de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires, tels que, E et H étant deux quelconques d'entre eux, aucun sous-ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ de E n'est homéomorphe à un sous-ensemble de H.

[1]) *Fund. Math.* t. VIII, p. 205.

Désignons maintenant par X_α la somme de tous les ensembles $\varphi(x_\xi)$, où x_ξ sont des termes de la suite (1) et $\xi \geqslant \alpha$. On a évidemment, pour $\alpha < \beta < \varphi$: $\varphi(x_\alpha) \subset X_\alpha$ et $\varphi(x_\alpha) X_\beta = 0$, d'où résulte comme nous savons, que l'ensemble X_β ne peut être homéomorphe à un sous-ensemble de X_α. D'autre part on a évidemment pour $\alpha < \beta < \varphi$, $X_\alpha \supset X_\beta$. On a donc $dX_\alpha > dX_\beta$, pour $\alpha < \beta < \varphi$.

Nous avons ainsi démontré *qu'il existe une suite transfinie de puissance du continu d'ensembles linéaires, dont les types de dimensions vont en décroissant.*

Il est à remarquer qu'en utilisant au lieu de la suite (1) de tous les nombres réels, une suite transfinie quelconque du type φ de nombres réels, on peut généraliser notre lemme, en démontrant qu'il existe dans tout ensemble linéaire de puissance du continu un ensemble N satisfaisant aux conditions de notre lemme. Il en résulte sans peine qu'il existe dans tout ensemble lineaire de puissance du continu une suite transfinie de puissance du continu de sous-ensembles dont les types de dimensions vont en décroissant.

Pareillement, en considérant les sommes partielles de la suite transfinie $\{\varphi(x_\alpha)\}\,(\alpha < \varphi)$ on démontre qu'il existe dans tout ensemble linéaire de puissance du continu une suite transfinie de puissance du continu de sous-ensembles dont les types de dimensions vont en croissant.