Essai d'une exposition de l'intégrale de Denjoy sans nombres transfinis.

Par

Paul Romanovski (Moscou).

On sait que beaucoup de résultats de la théorie des fonctions d'une variable réelle, obtenus d'abord à l'aide d'un procédé constructif avec emploi de nombres transfinis, furent ensuite trouvés au moyen de procédés non constructifs sans usage de nombres transfinis. Le théorème de M. Baire sur les fonctions de classe 1 peut en servir d'exemple. La présente Note constitue dans un certain genre un essai analogue d'exposer l'intégrale de M. Denjoy, en sacrifiant la constructivité, sans invoquer les nombrès transfinis[1]).

§ 1. Rappelons qu'on appelle *variation* d'une fonction continue $F(x)$ sur un ensemble borné parfait P le nombre

$$\Delta_P F(x) = F(\beta) - F(\alpha) - \sum \{F(\beta_i) - F(\alpha_i)\}$$

où α et β sont les extrémités de P et (α_i, β_i) sont tous les intervalles contigus à P. On attribue un sens au symbole $\Delta_P F(x)$ seulement dans le cas où la série

$$\sum |F(\beta_i) - F(\alpha_i)|$$

est convergente.

Définition I. *Nous dirons que la fonction $f(x)$ définie presque partout sur (a, b) est intégrable au sens de Denjoy sur (a, b), s'il existe au moins une fonction $F(x)$ continue sur (a, b) possédant la propriété: sur chaque ensemble parfait P situé sur (a, b) il existe au moins une portion $\overline{P}$ telle que pour toute sous-portion[2]) $\overline{\overline{P}}$ l'on ait*

$$\Delta_{\overline{\overline{P}}} F(x) = \int_{\overline{\overline{P}}} f(x)\, dx.$$

[1]) Des résultats proches aux miens étaient obtenus par M. S. Saks (Fundam. Mathematicae XIII, XV et *Zarys teorji całki*, Warszawa, 1930). Je n'indique pas déjà sur les recherches bien connues de M. N. Lusin.

Remarque. Il suit de la définition que la fonction continue $F(x)$ doit posséder la propriété: sur chaque ensemble parfait P il existe au moins une portion $\overline{P}$ telle que $\Delta_{\overline{P}} F(x)$ ait un sens.

Remarque. Il suit de la définition que la fonction $f(x)$ intégrable au sens de Denjoy doit posseder la propriété: sur chaque ensemble parfait il existe au moins une portion de sommabilité.

§ 2. **Lemme fondamental sur les familles d'intervalles.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles situés sur (a, b) et possédant les propriétés:*

1) *si (α, β) et (β, γ) appartiennent à $\mathcal{F}$, alors (α, γ) appartient à $\mathcal{F}$;*
2) *si (α, β) appartient à $\mathcal{F}$, alors tout intervalle situé sur (α, β) appartient à $\mathcal{F}$;*
3) *si tout intervalle situé à l'intérieur de (α, β) appartient à $\mathcal{F}$, alors (α, β) appartient à $\mathcal{F}$;*
4) *si tous les intervalles contigus à un ensemble parfait quelconque Q appartiennent à $\mathcal{F}$, alors il existe un intervalle de $\mathcal{F}$ qui contient à son intérieur un point de l'ensemble Q.*

Alors la famille $\mathcal{F}$ contient l'intervalle (a, b).

Appelons en effet un point de l'intervalle (a, b) point intérieur de la famille $\mathcal{F}$ s'il existe un intervalle de $\mathcal{F}$ qui contient ce point à son intérieur (ou qui simplement le contient s'il est question de a ou b). Des trois premières conditions il résulte que l'ensemble de points non intérieurs à $\mathcal{F}$ est parfait et que les intervalles qui lui sont contigus appartiennent à $\mathcal{F}$. Il ne reste plus qu'à démontrer que cet ensemble est dépourvu de points. S'il n'était pas ainsi, la quatrième condition entrainerait immédiatement une contradiction. C. q. f. d.

[2]) Nous appellerons *sous-portion* une portion de la portion.

Remarque: Si l'on sait à l'avance que tous les intervalles contigus à un certain ensemble parfait P appartiennent à $\mathcal{F}$, on peut rendre la quatrième condition plus étroite en exigeant que Q soit contenu dans P.

§ 3. Si $f(x)$ est intégrable dans le sens de Denjoy sur (a, b), la fonction $F(x)$ qui figure dans la définition I est définie à une constante additive près. En effet, en considérant la différence de deux telles $F(x)$ et en désignant par $\mathcal{F}$ la famille des intervalles de constance de cette différence, nous trouverons que la famille $\mathcal{F}$ satisfait à toutes les quatre conditions du lemme fondamental [3]). Par conséquent la définition suivante acquiert un sens:

Définition II. *Soit $f(x)$ intégrable au sens de Denjoy sur (a, b). Nous appellerons le nombre $F(b) - F(a)$ intégrale de Denjoy de $f(x)$ sur (a, b).*

§ 4. **Théorème.** *Soit $f(x)$ intégrable au sens de Denjoy sur (a, b) et $F(x)$ la fonction qui figure dans la définition I. Si alors $f(x)$ est sommable sur un ensemble parfait P et $\Delta_P F(x)$ a un sens, on a nécessairement*

$$\Delta_P F(x) = \int_P f(x)\, dx.$$

Soit, en effet $\mathcal{F}$ la famille d'intervalles (α, β) situés sur (a, b) et tels que la portion $P_{\alpha', \beta'}$, savoir le noyau du produit $(\alpha', \beta')P$, sasisfait à l'égalité

$$\Delta_{P_{\alpha',\beta'}} F(x) = \int_{P_{\alpha',\beta'}} f(x)\, dx$$

pour tous les (α', β') situés sur (α, β). Les trois premières conditions du lemme fondamental sont évidemment satisfaites. Ensuite, comme

[3]) Pour la vérification de la quatrième condition (et pour ce qui va suivre) il est utile d'avoir en vue le principe suivant. Supposons que nous ayons un nombre fini de propriétés, chacune desquelles soit telle que sur tout ensemble parfait P il existe une telle portion $\overline{P}$, que la propriété en question soit vérifiée sur chaque sous-portion $\overline{\overline{P}}$; alors sur tout ensemble parfait P il existe une telle portion $\overline{P}$ que toutes ces propriétés soient vérifiées simultanément sur chaque sous-portion $\overline{\overline{P}}$.

les intervalles contigus à P appartiennent évidemment a $\mathcal{F}$, eu égard à la remarque à la fin du § 2 il suffit de vérifier la quatrième condition du lemme fondamental seulement pour ensembles parfaits Q contenus dans P. Ceci s'effectue aisément, les transformations de sommation double qu'on y rencontre sont légitimes en vertu de ce que $\Delta_P F(x)$ a un sens. Ainsi (a, b) appartient à $\mathcal{F}$. C. q. f. d.

§ 5 Toute fonction intégrable au sens de Denjoy est mesurable car la famille des intervalles de mesurabilité satisfait à toutes les conditions du lemme fondamental. Remarquons ensuite qu'il résulte immédiatement des définitions I et II que si $f(x)$ est intégrable au sens de Denjoy sur (a, b), il en est de même sur chaque intervalle partiel; si $f(x)$ est intégrable sur (a, b) et sur (b, c) il en est de même sur (a, c) et l'on a de plus

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c;$$

si $f(x)$ est intégrable sur (a, b), alors $Kf(x)$ l'est également et l'on a de plus

$$\int_a^b Kf(x)\, dx = K\int_a^b f(x)\, dx \qquad (K \text{ constante});$$

si $f(x)$ est intégrable sur (a, b), alors $f(x+h)$ est intégrable sur $(a-h,\ b-h)$ et l'on a

$$\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (h \text{ constante}).$$

On voit ensuite directement que la somme de fonctions intégrables est intégrable, l'intégrale de la somme étant égale à la somme des intégrales. Enfin l'intégrale d'une fonction intégrable non négative $f(x)$ est toujours non négative car la famille des intervalles de non décroissance de la fonction $F(x)$ mentionnée dans la définition I satisfait à toutes les conditions du lemme fondamental

§ 6. **Théorème.** *L'intégrale indéfinie de Denjoy a presque partout une dérivée asymptotique égale à la fonction sous le signe $\int$.*

En effet, soit P un ensemble parfait quelconque sur (a, b) et $\overline{P}$ une portion satisfaisant aux conditions de la définition I. Posons

$$G = \begin{cases} F \text{ sur } \overline{P} \\ \text{linéaire dans les intervalles } (\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i) \text{ contigus à } \overline{P}, \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} f \text{ sur } \overline{P} \\ \dfrac{F(\overline{\beta}_i) - F(\overline{\alpha}_i)}{\overline{\beta}_i - \overline{\alpha}_i} \text{ sur } (\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i). \end{cases}$$

Il est clair que g est sommable sur $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ où $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont les extrémités de $\overline{P}$. Soit $\overline{\overline{P}}$ une sous-portion quelconque, $\overline{\overline{\alpha}}$ et $\overline{\overline{\beta}}$ ses extrémités et $(\overline{\overline{\alpha}}_i, \overline{\overline{\beta}}_i)$ tous les intervalles qui lui sont contigus. Alors la relation

$$F(\overline{\overline{\beta}}) - F(\overline{\overline{\alpha}}) = \sum \{F(\overline{\overline{\beta}}_i) - F(\overline{\overline{\alpha}}_i)\} + \int_{\overline{\overline{P}}} f\,dx$$

donne l'égalité

$$G(\overline{\overline{\beta}}) - G(\overline{\overline{\alpha}}) = \sum \int_{\overline{\overline{\alpha}}_i}^{\overline{\overline{\beta}}_i} g\,dx + \int_{\overline{\overline{P}}} g\,dx = \int_{\overline{\overline{\alpha}}}^{\overline{\overline{\beta}}} g\,dx.$$

Par conséquent nous avons $G'(x) = g(x)$ presque partout sur $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ d'où nous concluons que presqu'en chaque point de l'ensemble $\overline{P}$ la dérivée asymptotique de $F(x)$ est égale à $f(x)$. Maintenant, pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que la famille $\mathcal{F}$ des intervalles sur lesquels la dérivée asymptotique de $F(x)$ est presque partout égale à $f(x)$ satisfait à toutes les quatre conditions du lemme fondamental. C. q. f. d.

§ 7. **Théorème.** *Toute fonction intégrable au sens de Lebesgue-Dirichlet et, en particulier, toute fonction sommable est toujours intégrable au sens de Denjoy, la valeur de l'intégrale étant la même.*

Soit, en effet, $f(x)$ intégrable au sens de Lebesgue-Dirichlet sur (a, b) et $F(x)$ l'intégrale indéfinie correspondante. L'ensemble E de points de non-sommabilité de $f(x)$ est un ensemble fermé dénombrable, par conséquent aucun ensemble parfait P ne peut être contenu dans E. Soit $\overline{P}$ une portion située entièrement à l'intérieur d'un intervalle contigu à E. Il est clair que $\overline{P}$ satisfait aux conditions de la définition I. C. q. f. d.

Remarque. Tout fonction $f(x)$ non négative, intégrable au sens de Denjoy, est nécéssairement sommable. En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une fonction $\leqslant f(x)$ sommable avec une intégrale au sens de Lebesgue aussi grande que l'on veut; ce qui est absurde car cette dernière, étant en même temps une intégrale au sens de Denjoy, doit être $\leqq$ à l'intégrale au sens de Denjoy de $f(x)$.

§ 8. **Théorème.** *Une dérivée exacte finie est intégrable au sens de Denjoy, la primitive exacte étant l'intégrale indéfinie de Denjoy.*

En effet, soit $F'(x) = f(x)$ partout finie sur (a, b). Soit P un ensemble parfait quelconque sur (a, b). Ceux de ses points, pour lesquels

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| \leqq n$$

pour toute valeur de h, constitue un ensemble fermé E_n et l'on a de plus $E_1 + E_2 + \ldots = P$. On en conclut qu'il existe une portion $\overline{P}$ contenue dans un certain E_N. Aux points de l'ensemble $\overline{P}$ nous avons

$$|f(x)| \leqq N$$

et pour chaque intervalle $(\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i)$ contigu à $\overline{P}$ nous avons

$$\left|\frac{F(\overline{\beta}_i) - F(\overline{\alpha}_i)}{\overline{\beta}_i - \overline{\alpha}_i}\right| \leqq N.$$

Posons

$$G(x) = \begin{cases} F(x) \text{ sur } \overline{P} \\ \text{linéaire dans les intervalles contigus à } \overline{P}. \end{cases}$$

Il est clair que $G(x)$ est une fonction à nombres dérivés bornés sur $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ où $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont les extrémités de $\overline{P}$. Par conséquent, si $\overline{\overline{P}}$ est une sous-portion quelconque, en désignant par $\overline{\overline{\alpha}}$ et $\overline{\overline{\beta}}$ les extrémités de $\overline{\overline{P}}$ et par $(\overline{\overline{\alpha}}_i, \overline{\overline{\beta}}_i)$ tous les intervalles contigus à $\overline{\overline{P}}$, nous obtiendrons

$$G(\overline{\overline{\beta}}) - G(\overline{\overline{\alpha}}) = \int_{\overline{\overline{\alpha}}}^{\overline{\overline{\beta}}} G'(x)\,dx = \sum \int_{\overline{\overline{\alpha}}_i}^{\overline{\overline{\beta}}_i} G'(x)\,dx + \int_{\overline{\overline{P}}} G'(x)\,dx =$$

$$= \sum \{G(\overline{\overline{\beta}}_i) - G(\overline{\overline{\alpha}}_i)\} + \int_{\overline{\overline{P}}} G'(x)\,dx,$$

c'est à dire

$$F(\overline{\overline{\beta}}) - F(\overline{\overline{\alpha}}) = \sum \{F(\overline{\overline{\beta}}_i) - F(\overline{\overline{\alpha}}_i)\} + \int_{\overline{\overline{P}}} f(x)\,dx.$$

C. q. f. d.

Moscou, Février 1931.

On the imbedding of subsets of a metric space in Jordan continua[1]).

By

R. L. Wilder (Ann. Arbor, Mich., U. S. A).

In the present paper I propose to consider the following problems:

Let R be a metric space, and let M be an arbitrary compact subset of R. Do there exist necessary and sufficient conditions under which M is a subset of a Jordan continuum[2]) *of R?*

In case M is a subset of a Jordan continuum J of R, what is the minimum dimension (Menger-Urysohn) for which such curves J exist?

These and related problems have already received some attention by various authors. Moore and Kline[3]) gave conditions under which a bounded closed set in the euclidean plane is a subset of a simple arc, and E. W. Miller[4]) extended the same conditions to any euclidean space E_n. Gehman found[5]) that in the euclidean plane every bounded continuum K is imbedded in a Jordan continuum obtained by adding to K a denumerable infinity of arcs. Whyburn and Ayres showed[6]) recently that if K is a bounded

[1]) Presented to the American Mathematical Society, Mar. 29, 1929.

[2]) By a *Jordan continuum* is meant a compact, connected im kleinen continuum; i. e., a one-way continuous mapping of the straight line interval $0 \leq x \leq 1$.

[3]) R. L. Moore and J. R. Kline, *On the most general plane closed point-set through which it is possible to pass a simple continuous arc*, Annals of Math., (2), v. 20, pp. 218—223.

[4]) Cf. Bull. Amer. Math. Soc., v. 35, p. 152, abstract n° 6.

[5]) H. M. Gehman, *Concerning the subsets of a plane continuous curve*, Annals of. Math., v. 27, pp. 29—46, Th. II.

[6]) G. T. Whyburn and W. L. Ayres, *On continuous curves in n dimensions*. Bull. Amer. Math. Soc., v. 34, pp. 349—360, Th. 1.